СТАТЬЯ

УДК 528.145

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ УРАВНЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НИВЕЛИРНОГО РЯДА ИЗ СДВОЕННЫХ КВАДРАТОВ

Волков Н.В., Волкова Т.Н., Волков В.И.

ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский архитектурно-строительный университет», Санкт-Петербург, e-mail: volkov.nikita@yahoo.com

Уравнивание геодезических построений является весьма важной процедурой при выполнении высокоточных геодезических измерений и обработке их результатов как в процессе создания опорных геодезических сетей, так и при выполнении точных и высокоточных геодезических работ, выполняемых в составе специальных инженерных изысканий при проектировании прецизионных сооружений и эксплуатации объектов горнодобывающей промышленности. Так, в местах строительства прецизионных сооружений линейного типа, к которым относятся строительно-технологические комплексы линейных ускорителей заряженных частиц, промышленные конвейеры тонких технологий и другие высокотехнологические объекты, создаются точные и высокоточные геодезические построения, обеспечивающие проведение высокоточных и инженерно-геодезических наблюдений. В статье рассмотрен способ уравнивания фигуры таких построений, которыми могут быть: цепочки триангуляции и трилатерации, полигонометрические ходы и системы полигонометрических ходов, а также нивелирные ходы, системы нивелирных ходов и цепочек из нивелирных квадратов. При проектировании геодезических измерений, производящихся для оценки устойчивости прецизионного сооружения, прямо зависящей от микродеформаций горных пород его основания, возникает необходимость в исследовании видов таких микродеформаций и их кинематических характеристик. При этом постановка таких исследований предусматривает построение сетей высокоточного нивелирования, конфигурация которых привязана к геометрии сооружения. Так, для прямолинейного прецизионного сооружения (линейные ускорители, интерферометры, промышленные конвейеры тонких технологий и другие) создаются нивелирные сети в виде цепочек квадратов, в частности сдвоенных нивелирных квадратов. Рассмотрен порядок обработки результатов высокоточного нивелирования по квадратам, предусматривающий уравнивание и оценку точности результатов нивелирования. Авторами статьи разработан строгий способ оценки точности результатов нивелирования по квадратам. В результате проведенных теоретических исследований рассмотрены вопросы оценки точности функции уравненных неизвестных. Получена общая формула обратного веса функции уравненных величин для нивелирного ряда из сдвоенных квадратов.

Ключевые слова: нивелирование по квадратам, уравнивание элементов нивелирования по квадратам, оценка точности нивелирного ряда

ESTIMATION OF THE ACCURACY OF THE EQUALIZED ELEMENTS OF THE LEVELING SERIES OF DOUBLE SQUARES

Volkov N.V., Volkova T.N., Volkov V.I.

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, e-mail: volkov.nikita@yahoo.com

The problem of equalization of geodetic constructions is a very important procedure when performing high-precision geodetic measurements and processing their results both in the process of creating reference geodetic networks, and when performing accurate and high-precision geodetic works performed as part of special engineering surveys when designing precision structures and operating mining facilities. Thus, in the construction sites of precision linear structures, which include construction and technological complexes of linear accelerators of charged particles, industrial conveyors of fine technologies and other high-tech facilities, accurate and high-precision geodetic constructions are created, providing high-precision and engineering geodetic observations. The article considers a way to equalize the figure of such post-states, which can be: chains of triangulation and trilateration, polygonometric moves and systems of polygonometric moves, as well as leveling moves, systems of leveling moves and chains of leveling squares. When designing geodetic measurements made to assess the stability of a precision structure that directly depends on the micro-deformations of the rocks of its base, there is a need to study the types of such micro-deformations and their kinematic characteristics. At the same time, the formulation of such studies provides for the construction of high-precision leveling networks, the configuration of which is tied to the geometry of the structure. Thus, for rectilinear precision structures (linear accelerators, interferometers, industrial conveyors of fine technologies and others), leveling networks are created in the form of chains of squares, in particular, double leveling squares. The order of processing the results of high-precision leveling by squares is considered, which provides for equalization and evaluation of the accuracy of the leveling results. The authors of the article have developed a strict method for evaluating the accuracy of the results of leveling by squares. As a result of the theoretical studies conducted, the issues of estimating the accuracy of the function of the equalized unknowns are considered. A general formula for the inverse weight of the function of equalized quantities for a leveling series of double squares is obtained.

Keywords: leveling by squares, equalization of leveling elements by squares, evaluation of the accuracy of the leveling series

Проблема уравнивания геодезических построений является весьма важной процедурой при выполнении высокоточных геодезических измерений и обработке их результатов как в процессе создания опорных геодезических сетей, так и при выполнении точных и высокоточных геодезических работ, выполняемых в составе специальных инженерных изысканий при проектировании прецизионных сооружений и эксплуатации объектов горнодобывающей промышленности. Так, в местах строительства прецизионных сооружений линейного типа, к которым относятся строительно-технологические комплексы линейных ускорителей заряженных частиц, промышленные конвейеры тонких технологий и другие высокотехнологические объекты, создаются точные и высокоточные геодезические построения, обеспечивающие проведение высокоточных и инженерно-геодезических наблюдений. Фигурами таких построений могут быть: цепочки триангуляции и трилатерации, полигонометрические ходы и системы полигонометрических ходов, а также нивелирные ходы, системы нивелирных ходов и цепочек из нивелирных квадратов. Результаты геодезических измерений, в частности высокоточных нивелирований по цепочкам сдвоенных квадратов уравниваний, решают три основные задачи [1, 2]: определение по результатам геодезических измерений надежных значений искомых величин, а также их функций как косвенных результатов измерений оценки точности результатов измерений; оценки точности результатов измерений и функций измеренных величин.

В связи с тем, что устойчивость прецизионного сооружения прямо зависит от микродеформаций горных пород его основания [3, 4], возникает необходимость в исследовании видов таких микродеформаций и их кинематических характеристик. При этом постановка таких исследований предусматривает построение сетей высокоточного нивелирования, конфигурация которых привязана к геометрии сооружения. Так, для прямолинейного прецизионного сооружения (линейные ускорители, интерферометры, промышленные конвейеры тонких технологий и другие) создаются нивелирные сети в виде цепочек квадратов, в частности сдвоенных нивелирных квадратов (рисунок). Порядок обработки результатов высокоточного нивелирования по квадратам предусматривает уравнивание и оценку точности результатов нивелирования.

Основной целью исследования является разработка строгого способа оценки точности результатов нивелирования по квадратам.

Материалы и методы исследования

В соответствии с методом наименьших квадратов может быть вычислена общая формула обратного веса функции уравненных величин для сдвоенных нивелирных рядов из квадратов. Согласно данным о направлениях превышений по звеньям, приведенным на рисунке, условные уравнения поправок для сдвоенных рядов нивелирных квадратов можно предоставить в указанном виде:

I – верхний ряд нивелирных квадратов

$$(5i) + (5i - 1) + (5i - 2) - (5i - 6) + W_{2i-1} = 0, \quad (1)$$

II – нижний ряд нивелирных квадратов

$$(5i) + (5i - 1) + (5i - 2) - (5i - 3) + W_{2i} = 0, \quad (2)$$

при текущем номере i от 1 до n.

Уравнивание приращений весовой функции [1] отметки конечной точки K или приращения по нивелирному ходу O-K (O – начальная точка) может быть представлена как $\Delta F_K = \sum_{1}^{K} 5i$ при i от 1 до K.

Коэффициенты нормальных уравнений для сдвоенных нивелирных рядов из одинаковых квадратов представляют собой пятидиагональную матрицу и определяются равенствами

$$[a_g a_g] = 4, \ \text{при } g \text{ от 1 до } 2n$$

$$[a_g a_{g+1}] = e_g, \ \text{при } g = 1 \text{ и } g = 2n - 1 \quad (3)$$

$$e_{2n} = 0, \ e_{2n+1} = 1,$$

или

$$[a_{2i-1} a_{2i}] = 1, \ \text{при } i \text{ от 1 до } n \quad (4)$$

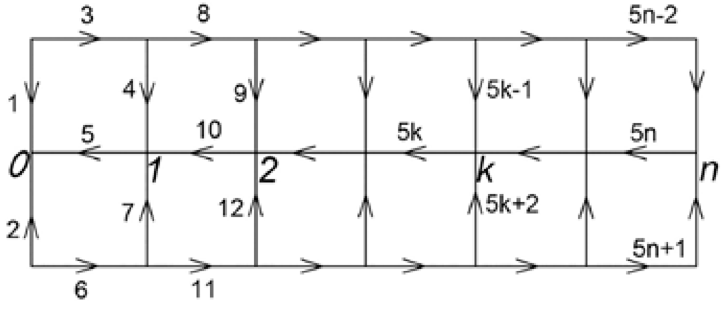

Схема сети из сдвоенных нивелирных квадратов

Далее:

$$[a_{g-2}a_g] = -1, \text{ при } g = 3, 4, \ldots, 2n$$

$$\text{и } [a_g f] = -1, \text{ при } g = 1, 1, \ldots, 2K \quad (5)$$

Откуда следует, что $[ff] = K$.

Тогда ошибка уравненной отметки точки равна

$$m_K = \mu\sqrt{\frac{1}{p_f}} \text{ при } \frac{1}{p_f} = [ff] - Q, \quad (6)$$

где μ – ошибка единицы веса, измеренного превышения стороны квадрата, Q – весовая функция.

Результаты исследования и их обсуждение

Одной из важных задач уравнительных вычислений в отношении нивелирного ряда из сдвоенных квадратов является оценка влияния уравнивания за условия полигонов на обратный вес любого элемента.

Общеизвестно [5–7], что составляющая обратного веса Q, как матрица весовых коэффициентов, определяется равенством

$$Q = \sum_{g=1}^{m} \frac{[a_g f(g-1)]^2}{[a_g a_g (g-1)]}. \quad (7)$$

Раскрывая по общему правилу [1, 8] алгоритмы преобразованных нормальных уравнений, соответствующих условиям полигонов с учетом равенств (3) и (5), в которых $[a_h a_{g+1}]$ при $h = 1, 2, \ldots (g-2)$ имеет вид

$$\left[a_{g+1}a_{g+1}g\right] = \left[a_{g+1}a_{g+1}\right] -$$

$$-\frac{\left[a_g a_{g+1}(g-1)\right]^2}{\left[a_g a_g (g-1)\right]} - \frac{\left[a_{g-1}a_{g+1}(g-2)\right]^2}{\left[a_{g-1}a_{g-1}(g-2)\right]}; \quad (8)$$

$$\left[a_{g+1}fg\right] = \left[a_{g+1}f\right] -$$

$$-\frac{a_g a_{g+1}(g-1)\left[a_g f(g-1)\right]}{\left[a_g a_g (g-1)\right]} -$$

$$-\frac{a_{g-1}a_{g+1}(g-2)\left[a_{g-1}f(g-2)\right]}{\left[a_{g-1}a_{g-1}(g-2)\right]}; \quad (9)$$

С учетом значений (1) и (2), получаем

$$\left[a_{g-1}a_{g+1}(g-2)\right] = \left[a_{g-1}a_{g+1}\right] = -1$$

$$\text{при } g = 2, 3, \ldots, 2n+1, \quad (10)$$

$$\left[a_g a_{g+1}\right] = +eg \text{ при } g = 1, 2, \ldots, 2n\text{-}1, \quad (11)$$

$$e_{2i+1} = e_{нечетн} = 1 \text{ и } e_{2i} = e_{четн} = 0. \quad (12)$$

Значение квадратичных членов преобразованных нормальных уравнений коррелат можно представить в виде простых дробей, что убедительно подтверждается в работе, а именно:

$$\left[a_g a_g (g-1)\right] = \frac{M_{g+1}}{M_g}. \quad (13)$$

Так как при раскрытии алгоритмов имеем

$$\left[a_1 a_1\right] = \frac{4}{1}; \left[a_2 a_2\right] = \frac{15}{4};$$

$$\left[a_3 a_3 \cdot 2\right] = \frac{56}{15}; \left[a_4 a_4 \cdot 3\right] = \frac{192}{56}.$$

С учетом условных уравнений поправок (1), а также равенств (3), (4) и (13) после введения обозначений

$$\left[a_g a_{g+1}(g-1)\right] = \frac{E_g}{M_g} \quad (14)$$

получим

$$\left[a_g a_{g+1}(g-1)\right] = \frac{E_g}{M_g} =$$

$$= \frac{e_g M_g + M_{g-1}\left[a_{g-1}a\ (g-2)\right]}{M_g}. \quad (15)$$

Тогда, с учетом (14) и (15), справедливо равенство

$$E_g - E_{g-1} = e_g M_g. \quad (16)$$

При $E_0 = 0$ сумма равенств (16) если $h = 1, 2, \ldots, g$ реализуется в виде аналитического выражения

$$E = \sum_{n=1}^{g} e_h M_h \text{, где } h = 1, 2, \ldots, g. \quad (17)$$

Далее, подставляя в (8) значения (13), (10) и (14) соответствующих алгоритмов, получим в общем виде

$$\left[a_{g+1}a_{g+1}g\right] = \frac{M_{g+2}}{M_{g+1}} = 4 - \frac{M_{g-1}}{M_g} - \frac{E_g^2}{M_g M_{g+1}}. \quad (18)$$

Из последнего равенства после его преобразования получаем

$$M_g M_{g+2} = 4M_g M_{g+1} - M_{g-1}M_{g+1} - E_g^2. \quad (19)$$

Из равенства (19), но с увеличенным на единицу индексом g, приняв во внимание (16), после сокращения на M_{g+1}, получим основную формулу для последовательного вычисления целых чисел M:

$$M_{g+3} = 4(M_{g+2} - M_g) + M_{g-1} - e_{g+1}(E_{g+1} + E_g) \quad (20)$$

Равенство (20) при условиях (12) и (17) является рекуррентным уравнением для чисел M, служащих для получения квадратичных членов по формуле (13).

Подставляя в (9) выражения преобразованных и представленных формулами (18), (14) и (10) алгоритмов после сокращений (g+1)-го члена, получим

$$\left[a_{g+1}fg\right] = \left[a_{g+1}f\right] + \frac{E_g}{M_{g+1}}\left[a_g f(g-1)\right] + \frac{M_{g-1}}{M_g}\left[a_{g-1}f(g-2)\right]. \quad (21)$$

Выражая числа $\left[a_g f(g-1)\right]$ в виде простых дробей:

$$\left[a_g f(g-1)\right] = \frac{F_g}{M_g}. \quad (22)$$

Из равенства (21) получим формулу для последовательного вычисления значений F:

$$F_g = M_g\left[a_g f\right] + \frac{E_{g-1}F_{g-1} + M_g F_{g-2}}{M_{g-1}}. \quad (23)$$

Используя равенства (18) и (22), найдем для любого члена формулы

$$U_g = \frac{\left[a_g f(g-1)\right]^2}{\left[a_g a_g (g-1)\right]} = \frac{F_g^2}{M_g M_{g+1}}. \quad (24)$$

Рассмотрим последовательные значения сумм S_m:

$$S_1 = U_1,\ S_2 = S_1 + U_2,\ \dots,$$

$$S_g = S_{g-1} + U_g,\ \dots,\ S_m = S_{m-1} + U_m. \quad (25)$$

Величины S_g можно представить в виде простых дробей, знаменателями которых будут служить числа М, а числителями – новая последовательность целых чисел S:

$$S_g = \frac{S}{M_{g+1}}. \quad (26)$$

Подставляя в общий член последовательности (25) выражения для S_g, S_{g-1} и U_g согласно формулам (24) и (26), получим формулу для вычисления каждого последующего значения S_g через предыдущие S_{g-1} и числа M и F:

$$S_g = \frac{M_{g+1}S_{g-1} + F^2}{M_g};\quad g = 1, 2, \dots, n. \quad (27)$$

По формуле (27) можно последовательно вычислить S_g, начиная с S_1, (положив $S_0 = 0$) и заканчивая S_m.

При вычислении S_m получим величину Q, вносимую в обратный вес любого нивелирного ряда условными уравнениями полигонов [9]:

$$Q = \frac{S_m}{M_{m+1}}. \quad (28)$$

Последовательно подставляя F_1, F_2, … в виде разложения по коэффициентам $\left[a_h f\right]$:

$$F_g = \varphi_{g1}[a_1 f] + \dots + \varphi_{gh}[a_h f] + \dots + \varphi_{gg}[a_g f]. \quad (29)$$

Согласно формуле (29) для вычисления чисел F_g необходимо соединить коэффициенты при $\left[a_h f\right]$, содержащиеся в разложениях F_{g-1} и F_{g-2}, что позволяет записать следующее аналитическое выражение для вычисления чисел φ_{gh}, а именно:

$$\varphi_{gh} = \frac{M_g \varphi_{g-2,h} + E_{g-1}\varphi_{g-1,h}}{M_{g-1}}. \quad (30)$$

Следует показать, что если значения чисел φ_{gh} в таблице, в которой g – номер строки, а h – номер столбца, то последовательность чисел φ_{gh} по столбцам и строкам удовлетворяют соответственно следующим двум возвратным уравнениям 4-го порядка с периодическими меняющимися коэффициентами e:

– для h-го столбца:

$$\varphi_{g+4,h} = e_{g+3}\varphi_{g+3,h+4}\varphi_{g+2,h} + e_{g+2}\varphi_{g+1,h} - \varphi_{gh},$$

$$\text{при } 1 \le h \le g. \quad (31)$$

– для g-й строки:

$$\varphi_{g,h+4} = -e_{h+2}\varphi_{g,h+3} + 4\varphi_{g,h+2} - e_{h+1}\varphi_{g,h+1} - \varphi_{gh},$$

$$\text{при } 0 \le h \le g. \quad (32)$$

Начальными членами для φ будут два числа: φ_{g1}, φ_{g2} (полагая предшествующие числа равными нулю), а числа е определяются равенствами (12).

Значения коэффициентов φ_{gh}

g	E_g	M_g	Значения φ при различных h						
			1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1						
2	1	4	1	4					
3	16	15	4	1	15				
4	16	56	8	16	16	56			
5	208	192	16	8	56	16	192		
6	208	712	47	68	120	225	208	712	
7	2623	2415	68	47	225	120	712	208	2415

Аналогично разложению F_g используем формулы (27) и (29) для последовательного получения S в виде разложения по произведениям $[a_g f][a_h f]$:

$$S_m = \sum_{g=1}^{m}\sum_{h=1}^{m} G_{mgh}\left[a_g \cdot f\right]\left[a_h \cdot f\right], \quad (33)$$

причем для последовательного вычисления G получим

$$G_{mgh} = \frac{M_{m+1}G_{m-1gh} + \varphi_{mg} \cdot \varphi_{mh}}{M_m}. \quad (34)$$

Величины G, как и M, E, φ, являются целыми положительными числами и определяются возвратным уравнением

$$G_{m,g,h+4} = -e_{h+2}G_{m,g,h+3} +$$

$$+4G_{m,g,h+3} - e_{h+1}G_{m,g,h+1} - G_{m,g,h},$$

при $g \neq h+2;\ h \geq 1$. (35)

Из сопоставления формул (33) и (35) видно, что $G_{mmh} = \varphi_{mh}$.

Подставив в это выражение S_m с учетом обозначения, $\rho_{mgh} = \dfrac{G_{mgh}}{M_{m+1}}$ получим в окончательном виде формулу для вычисления величины любой весовой функции [9, 10]:

$$Q = \sum_{g=1}^{m}\sum_{h=1}^{m} \rho_{mgh}\left[a_g f\right]\left[a_h f\right]. \quad (36)$$

Заключение

В результате проведенных теоретических исследований рассмотрены вопросы оценки точности функции уравненных неизвестных. Получена общая формула обратного веса функции уравненных величин для нивелирного ряда из сдвоенных квадратов.

Список литературы

1. Беликов А.Б., Симонян В.В. Математическая обработка результатов геодезических измерений: учебное пособие. 2-е изд. М.: НИУ МГСУ, 2016. 432 с.

2. Попов В.Н., Чекалин С.И. Геодезия. М.: Горная книга, 2017. 518 с.

3. Большаков В.Д., Левчук Г.П., Новак В.Е. Справочное руководство по инженерно-геодезическим работам. М.: Недра, 1980. 780 с.

4. Volkov V.I., Volkov N.V. Use of the program and goal-oriented approach to observe the vertical displacements of the earth's surface in Russia. E3S Web of Conferences. TPACEE-2019. 2019. No. 91 (07023). 7 p.

5. Лавров Г.Ф. Оценка точности элементов сдвоенного триангуляционного ряда, уравненного по направлениям. Исследование по геодезии и фотограмметрии: Научные записки № 5. Львов: ЛПИ, 1999. С. 108–140.

6. Волков В.И., Волков Н.В., Волкова Т.Н. Поиск оптимального способа уравнивания результатов повторного нивелирования, выполняемого на геодинамических полигонах // Успехи современного естествознания. 2021. № 11. С. 32–37.

7. Маркузе Ю.И. Обобщенный рекуррентный алгоритм уравнивания свободных и несвободных геодезических сетей с локализацией грубых ошибок // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. 2000. № 1. С. 3–16.

8. Шеховцов Г.А. Единый алгоритм уравнивания, оценки точности и оптимизации геодезических засечек. Н. Новгород: ННГАСУ, 2017. 123 с.

9. Дерр В.Я. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для вузов. СПб.: Лань, 2021. 596 с.

10. Simonyan V.V., Shendyapina S.V. Calculating the accuracy of strain observations of high-rise buildings and structures using electronic total stations. E3S Web of Conferences 164. 02022 (2020). TPACEE 2019. 9 p.