

УДК 55:519.63:536.24

**СРАВНЕНИЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ
ДЛЯ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИ СОЗДАНИИ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГЛЯЦИОЛОГИЧЕСКИХ
И ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

^{1,2}Попов С.В., ^{2,3}Боронина А.С., ²Немчинова А.В.

¹Полярная морская геологоразведочная экспедиция, Санкт-Петербург,
e-mail: spopov@yandex.ru;

²Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург,
e-mail: nemchinova02@mail.ru;

³Государственный гидрологический институт, Санкт-Петербург,
e-mail: al.b.s@yandex.ru

В настоящее время математическое моделирование является одним из основных способов изучения природных процессов, происходящих под ледником и в его толще. Современные модели, основанные на уравнениях математической физики, весьма сложны и решаются численно. Основная цель настоящей работы заключается в сравнении нескольких способов решения уравнения теплопроводности для двух сред: лёд и вода. Выбор этого уравнения обусловлен тем, что именно дифференциальные уравнения второго порядка составляют основу многих гляциологических и гидрологических моделей. В статье рассмотрено решение аналитическим методом, а также с использованием нескольких конечно-разностных схем: явной, неявной и Кранка-Николсона. По результатам исследования были проанализированы характерные особенности каждого из методов решения одномерной нестационарной задачи теплопроводности. Получены распределения температур в двух рассматриваемых средах и оценена степень сходимости между аналитическим и численными решениями путём вычисления и анализа среднеквадратических отклонений. Выполнены имитационные расчёты при различных критериях Куранта. Настоящее исследование показало, что для достижения приемлемой точности моделирования, которая оправдана с позиций технических характеристик используемой аппаратуры, имеет смысл задавать интервалы дискретизации по времени от 10 минут до одного часа и подбирать количество точек дискретизации по плановым координатам таким образом, чтобы число Куранта лежало в пределах от 0,05 до 0,1. Согласно полученным расчётам, при малых значениях числа Куранта точность явной конечно-разностной схемы выше остальных. Однако она резко падает при числе Куранта более 0,1, а при 1 становится неустойчивой. Следующей по точностным характеристикам является конечно-разностная схема Кранка-Николсона. Она более предпочтительна по сравнению с неявной схемой, но при указанных параметрах это не имеет большого значения.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, явная и неявная разностные схемы, схема Кранка-Николсона, аналитическое решение, математическое моделирование

**COMPARISON OF FINITE DIFFERENCE SCHEMES
FOR THEIR APPLICATION IN THE FORMULATION
OF MATHEMATICAL MODELS
OF GLACIOLOGICAL AND HYDROLOGICAL PROCESSES**

^{1,2}Popov S.V., ^{2,3}Boronina A.S., ²Nemchinova A.V.

¹Polar Marine Geosurvey Expedition, St. Petersburg, e-mail: spopov@yandex.ru;

²Saint-Petersburg State University, St. Petersburg, e-mail: nemchinova02@mail.ru;

³State Hydrological Institute, St. Petersburg, e-mail: al.b.s@yandex.ru

Currently, mathematical modelling is one of the main methods for studying natural processes occurring under the ice sheet and in its thickness. Present models based on the the equations of mathematical physics are complex and are solved using numerical methods. The main purpose of this work is to compare several methods for solving the heat equation for two media: ice and water. The choice of this equation is because second-order differential equations form the basis of many glaciological and hydrological models. The article considers the solution of the heat equation by the analytical method, as well as using several finite difference schemes: explicit, implicit and Crank–Nicolson. The result of the study was an analysis of the characteristic features of each method for solving a one-dimensional non-stationary problem of heat conduction. We have obtained the temperature distributions in the two considered media and estimated the degree of convergence between the analytical and numerical solutions by calculating the standard deviations. Simulations under various Courant condition were performed. The present study showed that in order to obtain acceptable simulation accuracy, it is necessary to set sampling intervals in time from 10 minutes to one hour and select the number of sampling points in distance so that the Courant condition is in the range from 0,05 to 0,1. According to the obtained calculations, the accuracy of the explicit scheme is higher than the others for a small Courant condition. However, the accuracy decreases significantly when the Courant conditions are greater than 0,1. If the Courant condition is greater than 1, then the scheme becomes unstable. The next most accurate is the Crank–Nicolson method. Its use is more preferable, but with the specified parameters, it does not matter.

Keywords: heat equation, explicit and implicit difference schemes, Crank–Nicolson method, analytical solution, mathematical modelling

Изучение множества природных процессов, особенно происходящих под ледниковым покровом и в его толще, практически невозможно выполнить *in situ*. Прямые измерения либо чрезвычайно сложны и дорогостоящи, либо вовсе технически неосуществимы на современном этапе развития. В связи с этим единственным способом изучения процессов, протекающих в этих средах, а также прогнозирования их состояния в будущем является математическое моделирование. Именно по этой причине ещё на заре планомерного изучения труднодоступных полярных регионов начали создаваться первые математические модели, в том числе динамики ледниковых покровов и процессов, происходящих на их ложе. Несмотря на простоту и большое количество допущений в этих моделях, все они имели в своей основе фундаментальные законы, выраженные через уравнения математической физики. Впоследствии, по мере широкого внедрения компьютерной техники, математические модели постепенно усложнялись [1-3] и обретали формы компьютерных программ. Однако применительно к оценке субгляциальных процессов они всё также основывались на решении фундаментальных уравнений переноса и теплопроводности. Единственность решения достигалась путём задания начальных и граничных условий (краевая задача). По понятным причинам даже наиболее простые модели не могут быть решены аналитически и реализуются лишь численными методами.

В настоящее время имеется множество методов численного решения уравнений математической физики, которые сводятся к интегрированию посредством применения различных конечно-разностных схем. Однако они, как и все приближённые методы вычислений, имеют свои недостатки. Имеется ряд работ, в которых с позиций математики обсуждаются те или иные аспекты различных конечно-разностных схем. В этом направлении много работал академик Александр Андреевич Самарский, создатель Всесоюзного центра математического моделирования и основоположник теории конечно-разностных схем в нашей стране. Его учебник [4] стал классическим. В последующих работах анализировались уже более узкие вопросы. В них рассматривались проблемы влияния шага по пространственным координатам на точность аппроксимации уравнений теплопроводности, устойчивости разностных уравнений теплопроводности и прочее [5; 6]. Однако рекомендации в этих

работах достаточно общие и при несомненных положительных качествах не дают полного представления о том, как именно будут различаться решения, полученные при применении разных конечно-разностных схем.

В рамках настоящего научного исследования выполнено сравнение аналитического и численного решений (по нескольким конечно-разностным схемам) уравнения теплопроводности для выяснения того, какие параметры конечно-разностных схем являются оптимальными для моделирования процессов в двух средах: вода и лёд. Выбор уравнения теплопроводности связан с тем, что именно дифференциальные уравнения второго порядка составляют основу многих математических моделей развития ледников и процессов в подледниковых водоёмах [2; 7; 8].

Материалы и методы исследования

Постановка задачи

Для сравнения результатов будем решать одномерную задачу об изменении температуры θ с течением времени t в некотором безграничном, однородном и изотропном слое толщиной L с неизменным коэффициентом теплопроводности ζ . Его удобнее представить через a^2 , $\zeta \equiv a^2$. На обеих поверхностях (границах) слоя зададим граничные условия Дирихле (первого рода), которые предполагают неизменность температуры с течением времени на левой и правой границах θ_L и θ_R соответственно. Начальное распределение температуры также будем считать постоянным по всему слою и равным θ_0 . Совместим начало оси абсцисс с его левой границей, а правый будем ориентировать в сторону возрастания значений переменной x . Тогда математическая формулировка задачи примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \\ \theta(t, x)|_{x=0} &= \theta_L, \\ \theta(t, x)|_{x=L} &= \theta_R, \\ \theta(t, x)|_{t=0} &= \theta_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Для сравнения результатов, полученных при использовании разных конечно-разностных схем, граничные, а тем более начальные, условия принципиального значения не имеют и не нарушают общности решения, поскольку всегда могут быть сведены к ним путём замены переменных.

*Аналитическое решение
задачи теплопроводности*

Задача в постановке (1) может быть решена аналитически, т.е. с получением точного решения, с которым и будут сравниваться все остальные. Для этого воспользуемся методом Фурье (разделения переменных). Однако он годится лишь при соблюдении нулевых граничных условий [9]. Чтобы этого достичь, введём новую переменную φ ,

$$\varphi(t, x) = \theta(t, x) - \left[\theta_L + \frac{x}{L}(\theta_R - \theta_L) \right].$$

В этом случае краевая задача (1) примет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \varphi(t, x) \Big|_{x=0} = 0, \quad \varphi(t, x) \Big|_{t=0} = \theta_0 - \theta_L - \frac{x}{L}(\theta_R - \theta_L) = \varphi(0, x).$$

Аналитическое решение этого уравнения известно [9]:

$$\varphi(t, x) = \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left\{ - \left(\frac{\pi a k}{L} \right)^2 t \right\} \sin \left(\frac{\pi a k}{L} x \right) \times \int_0^L \varphi(0, x) \sin \left(\frac{\pi a k}{L} x \right) dx.$$

Выполнив переход к прежней переменной θ , получим окончательное аналитическое решение уравнения (1) с ненулевыми начальными и граничными условиями:

$$\theta(t, x) = \theta_L + \frac{x}{L}(\theta_R - \theta_L) + \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left\{ - \left(\frac{\pi a k}{L} \right)^2 t \right\} \sin \left(\frac{\pi a k}{L} x \right) \times \int_0^L \left[\theta_0 - \theta_L - \frac{x}{L}(\theta_R - \theta_L) \right] \sin \left(\frac{\pi a k}{L} x \right) dx. \quad (2)$$

Несмотря на то что *точное решение* уравнения теплопроводности найдено, его нельзя представить в виде конечной комбинации элементарных функций. В этом смысле решение всё же является приближённым, но, при использовании большого количества членов разложения в ряд, оно практически совпадёт с точным. Таковым его и будем считать.

*Численное решение с применением
явной конечно-разностной схемы*

Четырёхточечная явная конечно-разностная схема, шаблон которой представлен на рис. 1а, является наиболее простой численной реализацией уравнения теплопроводности. Если N – это количество точек по толщине слоя, в которых осуществляется поиск решения задачи, то расстояние Δx между ними при использовании равномерной сетки составляет $\Delta x = L/(N-1)$. Тогда, возвращаясь к коэффициенту температуропроводности ζ , для вычисления значения температуры в n -й точке на j -м временном шаге θ_n^{j+1} может быть использовано соотношение

$$\frac{\theta_n^{j+1} - \theta_n^j}{\Delta t} = \zeta \frac{\theta_{n+1}^j - 2\theta_n^j + \theta_{n-1}^j}{\Delta x^2},$$

где Δt – шаг по времени [6; 10]. Таким образом, искомая величина θ_n^{j+1} :

$$\theta_n^{j+1} = \theta_n^j + \zeta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\theta_{n+1}^j - 2\theta_n^j + \theta_{n-1}^j). \quad (3)$$

При всей простоте явной схемы (3) у неё имеется существенный недостаток. Он заключается в выполнении необходимого условия устойчивости – т.н. *критерия Куранта*. Его смысл заключается в том, что расчётная схема не может корректно обсчитывать распространение возмущения, которое в реальности происходит быстрее, чем предусмотрено вычислительной схемой. Таким образом, шаг по времени должен быть меньше некоторого порогового значения, иначе результаты расчётов становятся неверными либо получаются с большой ошибкой. Если *число Куранта* k , $k \equiv 2\zeta\Delta t/\Delta x^2$, то обсуждаемая схема является устойчивой при $k < 1$ [6; 10]. Несмотря на этот нюанс, всё равно рассмотрим результаты, полученные при её использовании.

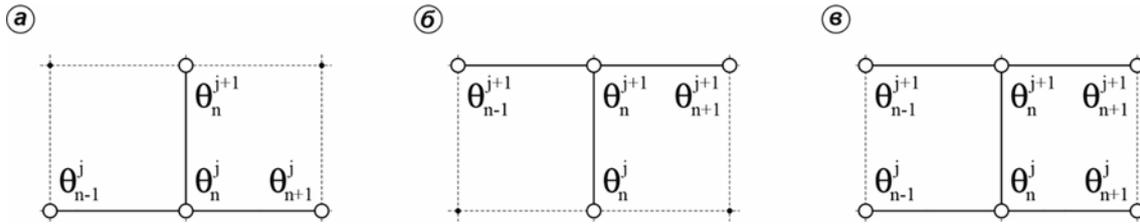


Рис. 1. Шаблоны конечно-разностных схем: явная (а), неявная (б), Кранка-Николсона (в)

Численное решение с применением неявной конечно-разностной схемы

Четырёхточечная неявная конечно-разностная схема, шаблон которой представлен на рис. 1б, является абсолютно устойчивой в n -й точке нашего столба воды на j -м временном шаге θ_n^{j+1} . Уравнение теплопроводности при этом может быть записано следующим образом [6; 10]:

$$\frac{\theta_n^{j+1} - \theta_n^j}{\Delta t} = \zeta \frac{\theta_{n+1}^{j+1} - 2\theta_n^{j+1} + \theta_{n-1}^{j+1}}{\Delta x^2}.$$

Если решение в предыдущем случае получается путём последовательных вычислений вдоль оси абсцисс, то в этом оно является результатом решения системы, состоящей из $N-2$ уравнений (4) и двух граничных условий. То есть оно получается сразу на всём временном слое, а не постепенно. Если решать её классическим методом Гаусса, то потребуется значительный объём памяти и вычислений. Имеется более перспективный подход, называемый *методом прогонки* [6; 10]. Неявная разностная схема абсолютно устойчива [6; 10; 11], т.е. решение имеется вне зависимости от числа Куранта. Это, безусловно, является важным достоинством неявной конечно-разностной схемы.

Численное решение с применением конечно-разностной схемы Кранка-Николсона

Рассмотрим ещё одну распространённую безусловно устойчивую шеститочечную конечно-разностную схему *Кранка-Николсона*. Её шаблон приведён на рис. 1в. Эта схема относится к классу схем с *весами*. Её идея заключается в более точном расчёте производных по плановым координатам, что, как следствие, при прочих равных условиях позволяет получить более точное решение [6; 10; 11]. Следуя [10], перепишем уравнение теплопроводности (1) в виде

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\zeta}{2} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\zeta}{2} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2},$$

а каждое из слагаемых правой части представим конечно-разностной схемой. При этом первое будем рассчитывать на временном слое j , а другое – на слое $j+1$. Тогда

$$\begin{aligned} \theta_n^{j+1} - \theta_n^j &= \frac{\kappa}{4} (\theta_{n+1}^{j+1} - 2\theta_n^{j+1} + \theta_{n-1}^{j+1}) + \\ &+ \frac{\kappa}{4} (\theta_{n+1}^j - 2\theta_n^j + \theta_{n-1}^j). \end{aligned}$$

Далее используется метод прогонки.

Результаты исследования и их обсуждение

Сравним результаты моделирования, выполненного с применением всех трёх рассмотренных выше конечно-разностных схем с точным аналитическим решением (2). Поскольку задача исследования заключается в выяснении оптимальных параметров для моделирования процессов в ледниках и в подледниковых водоёмах, то для определённости будем считать, что рассматриваемая среда – вода с коэффициентом температуропроводности $\zeta = 1,351 \times 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$. Пусть толщина слоя составляет 25 м. В начальный момент времени $\theta_0 = 10 \text{ }^\circ\text{C}$; граничные условия постоянны: $\theta_L = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ и $\theta_R = 0 \text{ }^\circ\text{C}$. Начальное распределение показано на рис. 2 (кривая 1).

Обратимся к рис. 3. На нём показаны графики среднеквадратичных отклонений σ численных решений от точных при различных интервалах времени Δt и постоянном количестве точек дискретизации N по толщине слоя, $N=500$. Это соответствует интервалу дискретизации $\Delta x=50 \text{ мм}$. Если $\tilde{\theta}_j$ и θ_j – аналитическое и численное решение в точке J соответственно, то σ может быть получено по известному статистическому соотношению

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{J=1}^N (\tilde{\theta}_J - \theta_J)^2 - \left[\frac{1}{N} \sum_{J=1}^N (\tilde{\theta}_J - \theta_J) \right]^2.$$

Как следует из представленных графиков, величина σ для первых расчётных значений достаточно высока. Затем она стремительно убывает по обратному экспоненциальному закону.

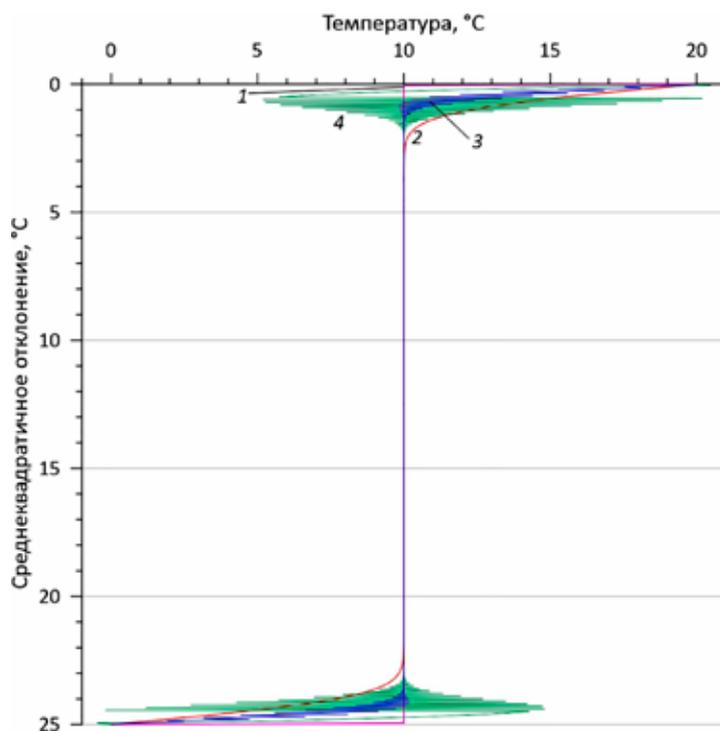


Рис. 2. Примеры модельных распределений температуры в слое воды толщиной 25 м, $\Delta x=50$ мм: 1 – начальное распределение; 2 – распределение температуры, смоделированное через 30 суток для схемы Кранка-Николсона при $\Delta t=10$ мин.; 3 – распределение температуры, смоделированное через 7 сут. 18 час. 40 мин. для явной схемы при $\Delta t=2$ час. 40 мин. ($\kappa=1,93$); 4 – то же, через 11 сут. 16 час

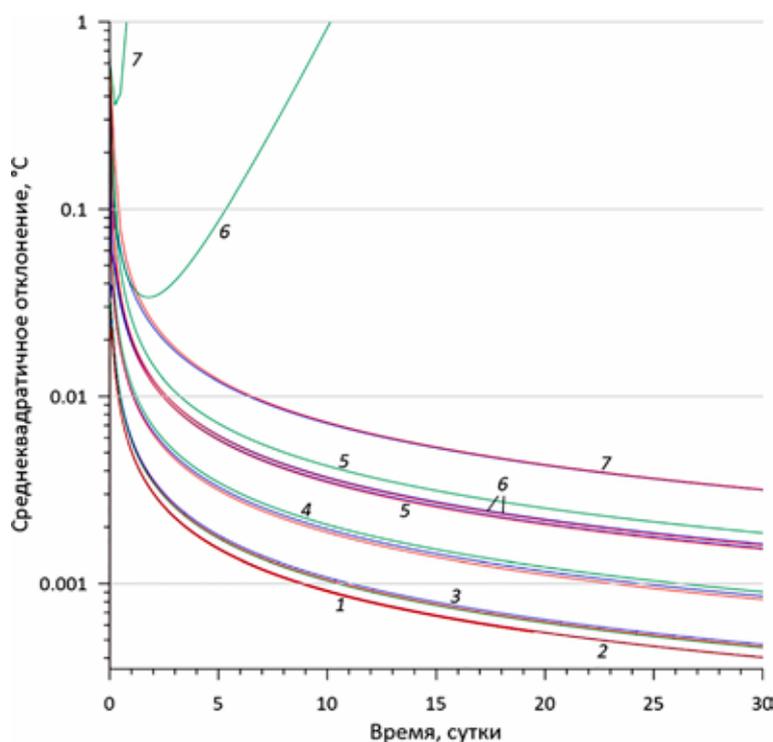


Рис. 3. Сравнение результатов моделирования для воды при $\Delta x=50$ мм: 1 – $\Delta t=10$ с, $\kappa=0,0010$; 2 – $\Delta t=1$ мин., $\kappa=0,0064$; 3 – $\Delta t=10$ мин., $\kappa=0,0645$; 4 – $\Delta t=1$ час, $\kappa=0,3875$; 5 – $\Delta t=2$ часа 30 мин., $\kappa=0,9690$; 6 – $\Delta t=2$ часа 40 мин., $\kappa=1,0336$; 7 – $\Delta t=6$ часов, $\kappa=2,326$. Синим цветом показаны кривые, построенные при использовании неявной конечно-разностной схемы, зелёным – явной, красным – Кранка-Николсона

Это связано с тем, что распределение температуры в начальный момент времени представляет собой сумму двух функций Хевисайда (рис. 2). Они, как известно, очень плохо описываются разложением в ряд Фурье, что требуется для аналитического решения (2), поскольку для практической реализации ряд не может состоять из бесконечного количества членов. Для построения решения авторы использовали разложение в ряд по 500 гармоникам. Таким образом, большие ошибки на этом временном интервале обусловлены исключительно недостатками описания аналитического решения. Но уже буквально после первых расчётных циклов начальное распределение чуть сглаживается, и численная реализация аналитического решения постепенно приближается к истинному. При этом величина ошибки σ уменьшается сразу примерно на полтора порядка (рис. 3). Судя по тому, что далее наблюдается вполне закономерная зависимость σ от числа Куранта, вклад ошибки реализации аналитического решения резко снижается, а ошибки интересующего нас численного решения – возрастает. В качестве примера на рис. 2 показано распределение температуры, наблюдаемое через 30 суток для схемы Кранка-Николсона при $\Delta t = 10$ мин. (кривая 2). Остальные решения не показаны, поскольку все они визуально совпадают друг с другом.

Расчётные кривые (рис. 3) показывают, что при использовании любой рассмотренной конечно-разностной схемы точность вычислений повышается с уменьшением Δt (и соответственным уменьшением числа Куранта). Это вполне закономерно, поскольку чем меньше интервал дискретизации по времени и по пространству, тем точнее вычисляются производные и, как следствие, точнее производятся расчёты посредством конечно-разностных схем. Исключение составляет явная схема, применение которой при числах Куранта $k > 1$ приводит к неустойчивому решению. Оно выражается в появлении гармонических флуктуаций, амплитуда которых постепенно нарастает. Скорость этого процесса возрастает с увеличением k . В качестве примера неустойчивое решение показано на рис. 2 (кривая 3). Оно рассчитано при $\Delta t = 2$ час. 40 мин. (что соответствует $k = 1,93$) и получено через 7 сут. 18 час. 40 мин. от начала моделирования. Кривая 4 на том же рисунке показывает ре-

зультат моделирования через 11 сут. 16 час. Как видно из представленных графиков, амплитуда вариаций достаточно быстро возрастает и в конечном итоге становится бесконечно большой. Увеличение флуктуаций сопровождается резким ростом величины общей ошибки σ , что наглядно демонстрируется на рис. 3 (кривые 6 и 7).

Если фиксировать N (т.е. Δx), то по мере роста числа Куранта убывание точности (т.е. рост σ) экспоненциально возрастает. Это наглядно демонстрируется группой графиков 1 на рис. 4. Таким образом, значения $k > 1$ хоть и не приводят к неустойчивому решению для неявной конечно-разностной схемы и схемы Кранка-Николсона, но делают результат менее точным. В частности, при увеличении числа Куранта с 1 до 10 ошибка σ возрастает примерно с $0,004$ °C до $0,03$ °C. При этом максимальные отклонения могут превышать эти значения на порядок и более. Это уже неприемлемо, поскольку указанные величины превышают точностные характеристики датчиков термокос [12].

Погрешность вычислений, достигаемая при $k = 0,06$, составляет менее $0,001$ °C, что вполне приемлемо для любых расчётов. Кроме того, этому значению k для воды соответствует интервал $\Delta t = 10$ мин. С позиций сбора термометрических данных этот интервал регистрации также оптимален, поскольку позволяет отследить с хорошей точностью не только сезонные, но и суточные колебания. С другой стороны, дальнейшее уменьшение k , а, следовательно, Δt , безусловно, улучшит результат (рис. 3, 4). Однако это повлечёт за собой существенное увеличение времени счёта. С другой стороны, графики на тех же самых рисунках показывают, что дальнейшее уменьшение интервала Δt не оправдывает достигаемой при этом точности вычислений. Таким образом, $k \approx 0,05$ можно считать оптимальным параметром для моделирования задач тепло-массообмена применительно к гидрологическим и гляциологическим расчётам.

Второй достаточно известный вывод, который следует из представленных рисунков, заключается в том, что конечно-разностная схема Кранка-Николсона в целом точнее неявной схемы. Однако расчёты показывают, что при $k < 0,1$ явная конечно-разностная схема становится более точной, хоть и ненамного. При $k < 0,01$ различий между всеми схемами практически не наблюдается.

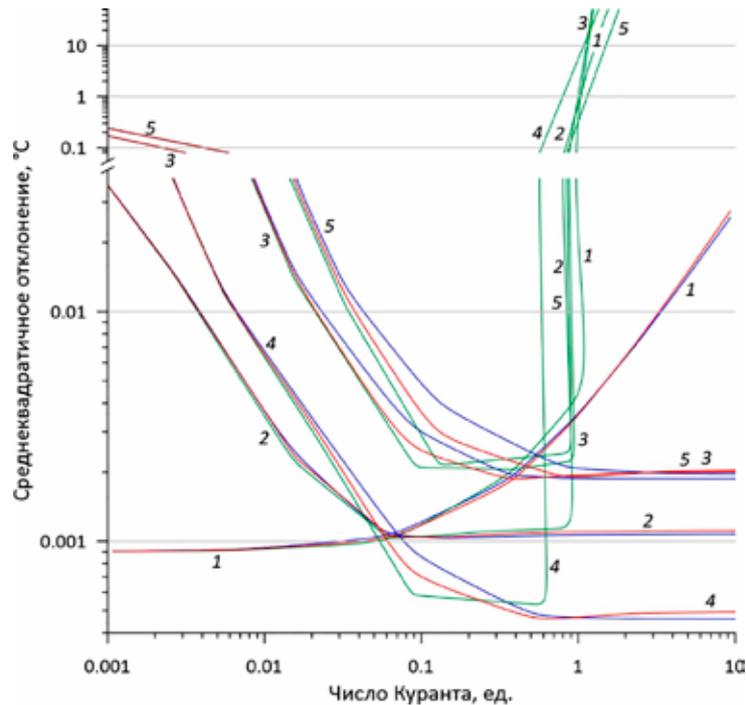


Рис. 4. Сравнение ошибок между аналитическим решением и решением по разным конечно-разностным схемам для сред вода и лёд на момент времени, равный 10 дням. Вода: 1 – $\Delta x=50$ мм, 2 – $\Delta t=10$ мин., 3 – $\Delta t=1$ час. Лёд: 4 – $\Delta t=10$ мин., 5 – $\Delta t=1$ час. Синим цветом показаны кривые, построенные при использовании неявной конечно-разностной схемы, зелёным – явной, красным – Кранка-Николсона

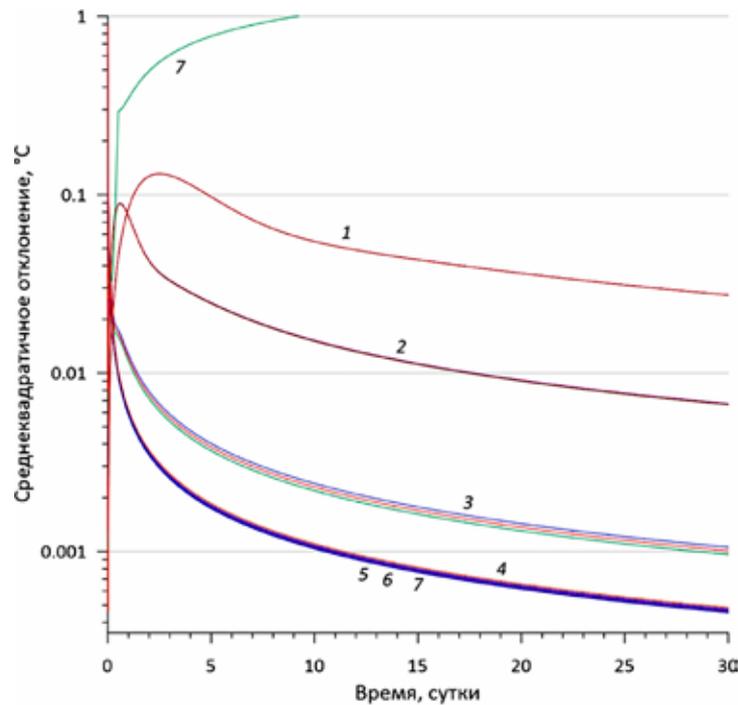


Рис. 5. Сравнение результатов моделирования для воды при $\Delta t=10$ мин.: 1 – $\Delta x=510,0$ мм, $\kappa=0,000622755$; 2 – $\Delta x=252,5$ мм, $\kappa=0,00254$; 3 – $\Delta x=100,4$ мм, $\kappa=0,01608$; 4 – $\Delta x=50,1$ мм, $\kappa=0,0646$; 5 – $\Delta x=33,4$ мм, $\kappa=0,1455$; 6 – $\Delta x=25,0$ мм, $\kappa=0,2589$; 7 – $\Delta x=12,5$ мм, $\kappa=1,036$. Синим цветом показаны кривые, построенные при использовании неявной конечно-разностной схемы, зелёным – явной, красным – Кранка-Николсона

Поскольку на число Куранта влияет не только Δt , но и Δx , проанализируем изменение этого параметра на точность получаемого результата. Для определённости сделаем это при $\Delta t=10$ мин., так как именно этому интервалу времени соответствует оптимальное число Куранта, согласно предыдущим оценкам. Зависимость погрешности вычислений σ от расчётного времени для воды показана на рис. 5. Как следует из представленных графиков, в данном случае наблюдается обратная закономерность: рост числа Куранта приводит к уменьшению погрешности. В целом это понятно, поскольку в данном случае происходит уменьшение интервала дискретизации по расстоянию, что приводит к улучшению точности определения производной по плановым координатам. Однако, начиная со значений $k=0,06$, значимого уменьшения σ не наблюдается (серия кривых 4, 5, 6 и 7). При этом, как и в предыдущем случае, при $k>1$ явная конечно-разностная схема становится неустойчивой. Таким образом, предложенную выше величину $k\approx 0,05$ можно считать оптимальной и в этом случае. На серии графиков 2 (рис. 4) представлено аналогичное сравнение точности результатов моделирования (величины σ), выполненного при использовании всех трёх конечно-разностных схем с аналитическим решением. Расчёты проведены при постоянном значении $\Delta t=10$ мин. Как следует из представленных графиков, наиболее точным решением (при условии его устойчивости) является то, которое получено при использовании явной схемы. Затем следует схема Кранка-Николсона и, наконец, неявная конечно-разностная схема. Приемлемая точность достигается также начиная с $k\approx 0,05$.

Попробуем увеличить интервал дискретизации по времени Δt с 10 минут до 1 часа, т.е. чуть ухудшим точность определения первой производной по времени и построим аналогичные графики. Они показаны серией кривых 3 на рис. 4. Предыдущая тенденция сохранилась: точность возрастает с ростом числа Куранта. Однако при этом закономерно возросла ошибка. При $k>0,3$ рост составил около 10%; при меньших значениях он гораздо больше, и при $k<0,1$ точность построений уже становится слишком низкой для каких-либо серьёзных оценок.

Поскольку планируется также моделирование субгляциальных гляциологических процессов, то логично произвести оценки не только для воды, но и для льда. Они

представлены сериями графиков 4 на рис. 4. Расчёты выполнены при аналогичных параметрах: толщина среды 25 м, $\Delta t=10$ мин., $\zeta=1,184\times 10^{-6}$ м²/с. Граничные и начальные условия уменьшены на 20 °С. Этим сохраняются относительные изменения, т.е. $\theta_L=-20$ °С, $\theta_R=0$ °С, $\theta_0=-10$ °С. Таким образом, эти построения по соотношению Δt и Δx аналогичны серии кривых 2 (рис. 4). Однако коэффициент теплопроводности ζ льда почти на порядок больше, чем у воды. Из графиков видно, что ход кривых 2 и 4 в целом сходный, и при k чуть менее 0,1 точностные характеристики серий становятся практически одинаковыми (кривые обеих серий пересекаются). При дальнейшем росте k точность построений для льда избыточно повышается и становится менее 0,001 °С. По мере приближения к значению $k=1$ точность построений для явной конечно-разностной схемы падает. При значениях k , близких к 0,5, её погрешность резко увеличивается, а затем решение становится неустойчивым.

На том же рисунке сериями кривых 5 показаны результаты аналогичных расчётов, полученные при $\Delta t=1$ час по аналогии с серией кривых 3 для воды. Несмотря на то что ζ сред отличается почти на порядок, кривые при малых k различаются не сильно. При $k>1$ эти серии кривых практически совпадают, за исключением нестабильных решений для явной конечно-разностной схемы.

Заключение

Для решения задач, которые основаны на уравнениях матфизики, параметры моделирования выбираются исходя из ожидаемых результатов. При этом современные модели, как правило, достаточно сложны и требуют значительных ресурсов и времени для расчётов. В этой связи выбор параметров для их минимизации с сохранением разумной точности является важной практической необходимостью, поскольку если точность избыточна, то ресурсы расходуются неоправданно, а скорость вычислений падает.

Настоящее исследование показало, что для достижения приемлемой точности, которая оправдана с позиций технических характеристик термодатчиков, имеет смысл задавать интервалы дискретизации по времени от 10 минут до одного часа и подбирать количество точек дискретизации по плановым координатам таким образом, чтобы число Куранта лежало в пределах от 0,05 до 0,1. Полученные расчёты показа-

ли, что при малых значениях числа Куранта точность явной конечно-разностной схемы выше остальных. Этот результат стал неожиданным для авторов. Следующей по точностным характеристикам идёт конечно-разностная схема Кранка-Николсона. Она более предпочтительна по сравнению с неявной схемой, но при указанных параметрах это не имеет большого значения. В принципе, если число Куранта не превысит значение 0,1, то вполне допустимо использование явной конечно-разностной схемы. Это существенно сэкономит ресурсы и увеличит время счёта. Вышеизложенное применимо к средам, коэффициенты теплопроводности которых находятся в интервале значений от 1×10^{-7} до 2×10^{-6} м²/с, что включает в себя лёд и воду.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ) в рамках проекта № 22-27-00266 «Разработка математической модели развития ледникового покрова с последующим применением для описания субгляциальных гидрологических процессов в районе подледникового озера Восток, Восточная Антарктида».

Список литературы

1. Постникова Т.Н., Рыбак О.О. Глобальные гляциологические модели: новый этап в развитии методов прогнозирования эволюции ледников. Часть 1. Общий подход и архитектура моделей // Лёд и Снег. 2021. Т. 61. № 4. С. 620–636. DOI: 10.31857/S2076673421040111.
2. Постникова Т.Н., Рыбак О.О. Глобальные гляциологические модели: новый этап в развитии методов прогнозирования эволюции ледников. Часть 2. Постановка экспериментов и практические приложения // Лёд и Снег. 2022. Т. 62. № 2. С. 287–304. DOI: 10.31857/S2076673422020133.
3. Sato T., Greve R. Sensitivity experiments for the Antarctic ice sheet with varied sub-ice-shelf melting rates. Ann. Glaciol. 2012. V. 53. No. 60. P. 221–228.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
5. Каримбаев К.Д., Рапилбекова Н.С. Численная оценка точности при пространственной дискретизации уравнений теплопроводности // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2009. Т. 11. №. 5-1. С. 138-143.
6. Гельфанд И.М., Локуциевский О.В. Метод прогонки для решения разностных уравнений / Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1962. С. 238-309.
7. Кислина А.Е., Попов С.В. Опыт моделирования субгляциальных гидрологических процессов ледника Альдегонда, Шпицберген // Геологический Международный Студенческий Саммит: сборник материалов (Санкт-Петербург, 09 апреля 2022 года). СПб.: Первый ИПХ, 2022. С. 180–184.
8. Popov S. Ice cover, subglacial landscape, and estimation of bottom melting of Mac. Robertson, Princess Elizabeth, Wilhelm II, and western Queen Mary Lands, East Antarctica. Remote Sens. 2022. V. 14. № 1. P. 241. DOI: 10.3390/rs14010241.
9. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том II. М.: Наука, 1974. 656 с.
10. Кольцова Э., Скичко А., Женса А. Численные методы решения уравнений математической физики и химии. М.: Юрайт, 2020. 220 с.
11. Лобаев А.Н., Вдовин С.И., Харитонов И.Ю., Богословская Н.М. Исследование уравнения теплопроводности с теплообменом на поверхности методом Кранка-Николсона // Национальная ассоциация ученых (НАУ). 2019. № 48/2019. Часть 3. С. 47-52.
12. Лебедева Л.С., Бажин К.И., Христофоров И.И., Абрамов А.А., Павлова Н.А., Ефремов В.С., Огонеров В.В., Тарбеева А.М., Федоров М.П., Нестерова Н.В., Макарьева О.М. Надмерзлотные субэдральные талики в бассейне реки Шестаковка (Центральная Якутия) // Криосфера Земли. 2019. Т. XXIII. № 1. С. 40–50. DOI: 10.21782/KZ1560-7496-2019-1(40-50).