УДК 528.06

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ СРЕДНЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Волков В.И., Волков Н.В., Волкова Т.Н.

ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет», Санкт-Петербург, e-mail: volkov.nikita@yahoo.com

Увеличение объемов и темпов строительства на современном этапе, необходимость сооружения прецизионных и уникальных объектов – ядерных реакторов АЭС, линейных и кольцевых ускорителей, антенн измерительных систем, промышленных комплексов, связанных единым технологическим процессом, – повысили требования как к точности, так и к срокам выполнения инженерно-геодезических изысканий. Это в свою очередь потребовало дальнейшего совершенствования методов обработки результатов повторных геодезических наблюдений. В статье рассмотрены вопросы оперативной математической обработки результатов повторного высокоточного нивелирования, которое выполняется в широко разветвленных наблюдательных геодезических сетях, получающих развитие на изыскательских, прогностических и техногенных геодинамических полигонах, предназначенных для изучения экзогенных геомеханических и эндогенных процессов. Так, на стадиях проектирования объектов АЭС в пределах перспективных площадок под строительство сооружений изучаются деформационные процессы, проявляющиеся в их основаниях, и современные вертикальные движения приповерхностных слоев земной коры по результатам повторного высокоточного нивелирования. При этом в пределах перспективных площадок создаются широко разветвленные, характеризуемые высокой плотностью, нивелирные сети. Математическая обработка результатов нивелирования таких сложных высотных сетей представляет собой громоздкий и сложный процесс, сопровождающийся значительными по объемам вычислениями. В статье предлагается метод, который позволяет упростить математическую обработку результатов нивелирования разветвленных геодезических сетей, на основе применения при расчетах разработанного авторами итерационного метода получения обобщенной средней из неравноточных результатов коррелированных измерений без обращения ковариационной матрицы. Такой новый метод обладает универсальностью в применении и значительно упрощает математическую обработку результатов нивелирования разветвленных сетей.

Ключевые слова: прецизионные сооружения, разветвленная нивелирная сеть, обработка рядов результатов нивелирования, обобщенная средняя, итерационный метод, рекуррентный алгоритм

ITERATIVE METHOD OF GENERALIZED AVERAGE OF CORRELATED MEASUREMENTS

Volkov V.I., Volkov N.V., Volkova T.N.

Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, e-mail: volkov.nikita@yahoo.com

The increase in the volume and pace of construction at the present stage, the need to build precesion and unique facilities – nuclear reactors of nuclear power plants, linear and ring accelerators, antennas of measuring systems, industrial complexes connected by a single technological process-have increased the requirements for both accuracy and timing of engineering and geodetic surveys. This, in turn, required further improvement of methods for processing the results of repeated geodetic observations. The article deals with the issues of operational mathematical processing of the results of repeated high-precision leveling, which is performed in widely branched observational geodetic networks, which are developed on survey, prognostic and technogenic geodynamic polygons designed to study exogenous geomechanical and endogenous processes. Thus, at the design stages of NPP facilities within the prospective sites for the construction of structures, the deformation processes manifested in their bases and modern vertical movements of the near-surface layers of the earth's crust are studied based on the results of repeated high-precision leveling. At the same time, widely branched, high-density leveling networks are being created within the prospective sites. Mathematical processing of the results of leveling such complex high-altitude networks is a cumbersome and complex process, accompanied by significant amounts of calculations. The article proposes a method that simplifies the mathematical processing of the results of leveling of branched geodetic networks, based on the application of the iterative method developed by the authors to obtain a generalized average from non-uniform results of correlated measurements without inverting the covariance matrix. This new method has a universal application and greatly simplifies the mathematical processing of the results of leveling branched networks.

Keywords: precision structures, branched leveling network, processing of series of leveling results, generalized mean, iterative method, recurrent algorithm

На стадии проектирования прецизионных сооружений атомных станций в перспективных пунктах их размещения создаются изыскательские геодинамические полигоны для изучения экзогенной и эндогенной геодинамики. Геодинамические полигоны создаются на местности в виде разветвленных высокоточных нивелирных сетей. Результаты повторного нивелирования таких сетей позволяют изучить в сжатые сроки (2–4 года) устойчивость оснований фундаментов проектируемых прецизионных объектов и кинематические характеристики современной геодинамики сооружений в сложившихся природных или природно-техногенных условиях.

При этом предъявляются особые требования как к совершенствованию постановки повторного нивелирования, так и к дальнейшему повышению уровня математической обработки рядов результатов нивелирования на основе разработки универсальных методов, обеспечивающих наилучшее приближение к неизвестной [1–3].

Целью исследования, представленного в статье, является разработка нового итерационного метода получения обобщенной средней (наилучшего приближения к неизвестной) из неравноточных результатов коррелированных измерений без обращения ковариационной матрицы, обладающего универсальностью при упрощении и снижении объемов вычислений по сравнению со стандартным походом [4–6].

Материалы и методы исследования

Суть метода состоит в том, что обобщённая средняя неравноточных измерений l_1, l_2, ... , l_n, как известно [4], определяется аналитическим выражением:

$$l_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \pi_i l_i}{\sum_{i=1}^{n} \pi_i},$$

где π_i – обобщенный вес, равный сумме элементов i-й строки матрицы $Q_l^{-1}\left(Q_l = \frac{K_l}{D_0}\right)$; K_l – ковариационная матрица результатов измерений; D_0 – дисперсия единицы веса.

Рассмотрим один из вариантов представления погрешностей результатов измерений, представленных выражением: $\Delta l_i = \Delta_i + \eta$, где Δ_i и η – случайные некоррелированные погрешности (Δ_i – индивидуальная погрешность, принадлежащая i-му результату l_i, а η – общая погрешность, входящая во все результаты наблюдений). Для такого случая разработан метод [4] установления обобщенной средней с оценкой ее точности.

В статье рассматривается итерационный метод получения обобщённой средней без обращения матрицы Q_l^{-1}, отличающийся универсальностью по отношению к методу, описанному в работах [4–6].

Результаты исследования и их обсуждение

Представим погрешность результатов наблюдений следующим аналитическим выражением:

$$\Delta l_i = \Delta_i + \sum_{r=1}^{s} \Delta_{\Omega_r} + \eta,$$

где Δ_{Ω_r} – погрешность, входящая в множество наблюдений Ω_r.

При этом условно, в качестве примера рассмотрим разветвленную нивелирную сеть (рисунок). В данной сети превышения между нивелирными пунктами i и A представлены величиной l_i; Δ_i – представляют ошибки превышений, полученных в секциях d_i; η – ошибка превышения в секции d_{16}; Δ_{Ω_1} – ошибки нивелирования в секции d_{10} и входящая в множество наблюдений Ω_1 (l_1, l_2, l_3).

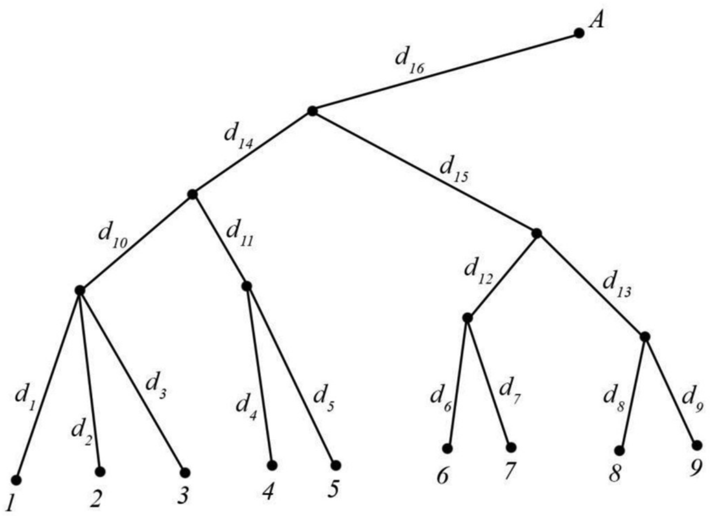

Схема разветвленной нивелирной сети

Рассмотрим матрицы Q_l , Q_Δ , Q_{Ω_r} и Q_η :

$$Q_l = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}, \; q_{ij} = \begin{cases} q_{l_i} = \dfrac{1}{P_{l_i}} = \dfrac{D_{li}}{D_0}, \; i = j \\ \dfrac{1}{P_{l_i}} = \dfrac{K_{l_i l_j}}{D_0}, \; i \neq j \end{cases},$$

$$Q_{\Omega_r} = \begin{pmatrix} q_{11}^2 & q_{12} & \dots & q_{1n}^2 \\ q_{21}^2 & q_{22}^2 & \dots & q_{2n}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1}^2 & q_{n2}^2 & \dots & q_{nn}^2 \end{pmatrix}, \; q_{ij}^2 = \begin{cases} 0, \quad i \notin \Omega_r \\ 0, \quad j \notin \Omega_r \\ q_r = \dfrac{1}{P^2} = \dfrac{D_{\Delta_{\Omega_r}}}{D_0}, \quad i, j \in \Omega_r \end{cases},$$

$$Q_\Delta = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & q_n \end{pmatrix}, \; q_{ij} = \frac{1}{P_i} = \frac{D_{\Delta i}}{D_0}, \; Q_\eta = \begin{pmatrix} q_\eta & q_\eta & \dots & q_\eta \\ q_\eta & q_\eta & \dots & q_\eta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_\eta & q_\eta & \dots & q_\eta \end{pmatrix}, \; q_\eta = \frac{1}{P_\eta} = \frac{D_\eta}{D_0}.$$

При этом: $Q_l = Q_\Delta + \sum_{r=1}^{S} Q_{\Omega_r} + Q_\eta$.

Известно [4], что $Q_l \pi = I$, где $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n)$; I – единичный вектор-столбец. Принимая это во внимание, получаем:

$$\begin{pmatrix} q_1 \, \pi_1 \\ q_2 \, \pi_2 \\ \dots \, \dots \\ q_n \, \pi_n \end{pmatrix} + \sum_{r=1}^{S} q^r \left(\sum_{j \in \Omega_r}^{n} \pi_j \right) \begin{pmatrix} \chi_r^1 \\ \chi_r^2 \\ \dots \\ \chi_r^n \end{pmatrix} + \left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i \right) q^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $\chi_r^i = \begin{Bmatrix} 1, & i \in \Omega_r \\ 0, & i \notin \Omega_r \end{Bmatrix}$ – характеристическая функция множества Ω_r.

Из аналитического выражения следует, что при каждом значении $i = 1, 2, \dots, n$ справедливо равенство:

$$q_i \pi_i + \sum_{r=1}^{S} q^r \left(\sum_{j \in \Omega_r}^{n} \pi_j \right) \chi_r^i + \left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i \right) q^n = I . \quad (1)$$

Обозначив $z_i = \dfrac{\pi_i}{1 - \left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i \right) q^n}$ в результате суммирования по $i \in \Omega_\alpha$, преобразуя равенство (1), получим:

$$\sum_{i \in \Omega_\alpha} z_i + \sum_{r=1}^{S} \frac{1}{P^r} \left(\sum_{j \in \Omega_r} z_j \right) \left(\sum_{i \in \Omega_\alpha} P_i \chi_r^i \right) = \sum_{i \in \Omega_r} P_i . \quad (2)$$

Из определения χ_r^i следует, что:

$$\sum_{i\in\Omega_\alpha} P_i\chi_r^i = \sum_{i\in\Omega_\alpha\cap\Omega_r} P_i\,, \tag{3}$$

где $\Omega_\alpha \cap \Omega_r$ представляет пересечение множеств Ω_α и Ω_r.

Применим обозначения: $B_{i,j} = \dfrac{\sum\limits_{K\in\Omega_i\cap\Omega_j} P_K}{P^j}$, $i = 1, 2, \ldots, S$; $j = 1, 2, \ldots, S$; $c_i = \sum\limits_{k\in\Omega_i} P_k$, $i = 1,2, \ldots, S$. В частности, $B_{rr} = \dfrac{\sum\limits_{k\in\Omega_r} P_k}{P^r}$.

Исходя из выражений (2) и (3), находим S неизвестных сумм $\sum\limits_{i\in\Omega_r} z_i$:

$$\begin{pmatrix} (1+B_{11}) & B_{12} & \ldots & B_{1S} \\ B_{21} & (1+B_{22}) & \ldots & B_{2S} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{S1} & B_{S2} & \ldots & (1+B_{SS}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum\limits_{i\in\Omega_1} z_i \\ \sum\limits_{i\in\Omega_2} z_i \\ \ldots \\ \sum\limits_{i\in\Omega_S} z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_S \end{pmatrix}. \tag{4}$$

После обращения матрицы B: $B = \begin{pmatrix} (1+B_{11}) & B_{12} & \ldots & B_{1S} \\ B_{21} & (1+B_{22}) & \ldots & B_{2S} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{S1} & B_{S2} & \ldots & (1+B_{SS}) \end{pmatrix}$ и подстановки найденных решений $\sum\limits_{i\in\Omega_r} z_i$ ($r = 1, 2, \ldots, S$) системы (4) в выражение (1), находим общие веса z_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

При этом отметим, что справедливо равенство $l_{cp} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i l_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i l_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i}$ и тот факт, что размерность B, равная S, значительно меньше размерности n-мерной матрицы Q.

Остановимся на предположении, что $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$, т.е. множества Ω_i и Ω_j дизъюнктные при $i \neq j$. В этом случае B становится диагональной, и обратная матрица B^{-1} явным образом представляется как: $B^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+B_{11}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+B_{22}} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \dfrac{1}{1+B_{SS}} \end{pmatrix}$.

Рассмотрим решения системы уравнений (4) в следующем виде:

$$\sum_{j\in\Omega} z_j = \frac{c_r}{1+B_{rr}} = \frac{\sum\limits_{i\in\Omega_r} P_i}{1+\dfrac{\sum\limits_{i\in\Omega_r} P_i}{P_r}}. \tag{5}$$

Представим формулу (1) с учетом выражения (5) в виде: $z_i = P_i\left(I - \sum_{r=1}^{S} \frac{B_{rr}}{1+B_{rr}} \chi_r^i\right)$. Окончательно получим:

$$l_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i B_i}{\sum_{i=1}^{n} z_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i l_i \left(1 - \sum_{r=1}^{S} \frac{B_{rr}}{1+B_{rr}} \chi_r^i\right)}{\sum_{i=1}^{n} P_i \left(1 - \sum_{r=1}^{S} \frac{B_{rr}}{1+B_{rr}} \chi_r^i\right)} = \frac{\sum_{r=1}^{S} \frac{1}{1+B_{rr}} \left(\sum_{i\in\Omega_r} P_i l_i\right)}{\sum_{r=1}^{S} \frac{1}{1+B_{rr}} \left(\sum_{i\in\Omega_r} P_i\right)}. \tag{6}$$

Рабочая формула (6) позволяет вычислить обобщённую среднюю в рассмотренном случае. В целях получения рекуррентной формулы для более общего случая, формулу (6) следует представить в другом виде. Для случая отсутствия ограничения общности предположим, что $l_i = l_i^1 + d$, где $\Delta_{l_i^1} = \Delta_i + \sum_{r=1}^{S} \Delta_{\Omega_r}$; $\Delta d = \eta$.

В данном случае справедливо равенство:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \left(l_i^1 + d\right)}{\sum_{i=1}^{n} z_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i l_i^1}{\sum_{i=1}^{n} z_i} + d. \tag{7}$$

Приняв обозначение $l_{cp}^{\Omega_r}(l_i) = \frac{\sum_{i\in\Omega_r} P_i l_i}{\sum_{i\in\Omega_r} P_i}$, легко доказать:

$$\frac{1}{Pl_{cp}\Omega_r(l_i)} = \frac{1}{\sum_{i\in\Omega r} P_i} + \frac{1}{P^r} = \frac{1+B_{rr}}{\sum_{i\in\Omega r} P_i}.$$

И следовательно:

$$l_{cp} = \frac{\sum_{r=1}^{S} P_{l_{cp}(li)}^{\Omega_r} l_{cp}^{\Omega r}(l_i^1)}{\sum_{r=1}^{S} P_{l_{cp}}^{\Omega r}(l_i^1)} + d. \tag{8}$$

На основе формулы (8) можно построить для нахождения l_{cp} рекуррентный процесс в более общей ситуации. Из вычисления $P_{l_{cp}} = \frac{D_{l_{cp}}}{D_0}$ получаем:

$$\frac{1}{P_{l_{cp}}} = \frac{D_{l_{cp}}}{D_0} = \frac{\sum_{r=1}^{S}\left(P_{l_{cp}}^{\Omega_r}\left(l_i^1\right)\right)^2 \frac{D_{l_{cp}}^{\Omega_r}(l_i^1)}{D_0}}{\left(\sum_{r=1}^{S} P_{l_{cp}}\Omega_r(l_i^1)\right)^2} + \frac{D(d)}{D_0} = \frac{\sum_{r=1}^{S} P_{l_{cp}}^2 \Omega_r(l_i^1) \frac{1}{P_{l_{cp}}\Omega_r(l_i^1)}}{\sum_{r=1}^{S}\left(P_{l_{cp}}\Omega_r(l_i^1)\right)^2} + \frac{1}{P_\eta} =$$

$$= \frac{1}{\sum_{r=1}^{S} P_{l_{cp}}\Omega_r(l_i^1)} + \frac{1}{P_\eta} = \frac{1}{\sum_{r=1}^{S} \frac{1}{\frac{1}{\sum_{i\in\Omega_r} P_i} + \frac{1}{P^r}}} + \frac{1}{P_\eta}.$$

Предположим, что имеется двухиндексовое семейство множеств наблюдений Ω_i^r, $i = 1, 2, \dots, k$; $r = 1, 2, \dots, S$ и при фиксированном r при различных нижних индексах множества Ω_i^r не пересекаются, т.е. $\Omega_i^r \cap \Omega_j^r = 0$, при $i \neq j$, $r = 1, 2, \dots, S$. Обозначим $\Omega^r(k)$ – единственное множество семейства $\left\{\Omega_i^r\right\}_{i=1}^k$, содержащее наблюдение l_k.

Пусть:

$$l_k = l_k^0 + d_k^1 + \Delta_k + d_{\Omega(k)} + \Delta_{\Omega(k)} + d_{\Omega^2(k)} + \Delta_{\Omega^2(k)} \ldots + d_{\Omega^S(k)} + \Delta_{\Omega^S(k)} =$$
$$= l_k^0 + d_k + d_{\Omega(k)} + d_{\Omega^2(k)} + \ldots + d_{\Omega^S(k)},$$

где l_i^0, $d_{\Omega^r(k)}$ вычисляются точно, а $\Delta_{\Omega^r(k)}$ (при $r = 1, 2, \dots, S$) – ошибки, принадлежащие множеству наблюдений $\Omega^r(k)$.

Наконец, предположим, что $\Omega^r(k) \subset \Omega^{r+1}(k)$ для $r = 1, 2, \dots, S$-1 и $k = 1, 2, \dots, n$. Примем также, что $\Omega^S(k)$ означает все множество наблюдений $\left\{l_1, l_2, \ldots, l_n\right\}$.

Алгоритм вычислений

1. Вычисляем для усеченных наблюдений вида: $l_k^{\Omega^1(k)} = l_k^0 + \Delta_k + d_{\Omega^1(k)} + \Delta_{\Omega^1(k)}$. К обобщенных средних по множествам:

$$l_{cp}(\Omega_i^1) = \frac{\sum\limits_{j\in\Omega_i^1} P_{\Delta_j} l_j^{\Omega_i^1}}{\sum\limits_{j\in\Omega_i^1} P_{\Delta_j}} = \frac{\sum\limits_{j\in\Omega_i^{'}} P_{\Delta_j}(l_j^0 + d_j)}{\sum\limits_{j\in\Omega_i^1} P_{\Delta_j}} + d_{\Omega_i^1}; \text{ при } i = 1, 2, \dots, k.$$

Далее вычисляем:

$$P_{l_{cp}(\Omega_i^1)} = \frac{1}{\dfrac{1}{\sum\limits_{j\in\Omega_j^1} P_{\Delta_j}} + \dfrac{1}{P_{\Omega_j^1}}}; \quad \frac{1}{P_{\Delta_i}} = \frac{D_{\Delta_i}}{D_0}; \quad \frac{1}{P_{\Omega_i^1}} = \frac{D_{\Delta_{\Omega_i^1}}}{D_0}.$$

2. Вычисляем на основании формулы (8):

$$l_{cp}(\Omega_i^2) = \frac{\sum\limits_{\Omega_j^1\in\Omega_i^r} P_{l_{cp}}(\Omega_j^1) l_{cp}(\Omega_j^1)}{\sum\limits_{\Omega_j^1\in\Omega_i^r} P_{l_{cp}}(\Omega_j^1)} + d_{\Omega_i^r}, \text{ при } i = 1, 2, \dots, k.$$

$$P_{l_{cp}(\Omega_i^r)} = \frac{1}{\dfrac{1}{\sum\limits_{\Omega_j\in\Omega_i^r} P_{l_{cp}(\Omega_j^1)}} + \dfrac{1}{P_{\Omega_i^r}}},$$ и так далее до последнего S-го шага.

Приведем пример расчета для нивелирной сети вида (рисунок).

На участках с превышением d_i число станций равно $\frac{1}{P_i}$. Выпишем систему множеств:

$$\Omega_1^1\left\{l_1, l_2, l_3\right\};\ \Omega_2^1\left\{l_4, l_5\right\};\ \Omega_3^1\left\{l_6, l_7\right\};\ \Omega_4^1\left\{l_8, l_9\right\};$$

$$\Omega_1^2\left\{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5\right\};\ \Omega_2^2\left\{l_6, l_7, l_8, l_9\right\};\ \Omega_1^3\left\{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, l_8, l_9\right\}.$$

Вычисляем $l_{cp}^{-\Omega_1^1}$, $l_{cp}^{-\Omega_2^1}$, $l_{cp}^{-\Omega_3^1}$, $l_{cp}^{-\Omega_4^1}$:

$$l_{cp}^{\Omega_1^1} = \frac{P_1(H_1+d_1)+P_2(H_2+d_2)+P_3(H_3+d_3)}{P_1+P_2+P_3}+d_{10};\; P_{l_{cp}}^{\Omega_1^1} = \frac{1}{\dfrac{1}{P_1+P_2+P_3}+\dfrac{1}{P_{10}}};$$

$$l_{cp}^{\Omega_2^1} = \frac{P_4(H_4+d_4)+P_5(H_5+d_5)}{P_4+P_5}+d_{11};\; P_{l_{cp}}^{\Omega_2^1} = \frac{1}{\dfrac{1}{P_4+P_5}+\dfrac{1}{P_{11}}};$$

$$l_{cp}^{\Omega_3^1} = \frac{P_6(H_6+d_6)+P_7(H_7+d_7)}{P_6+P_7}+d_{12};\; P_{l_{cp}}^{\Omega_3^1} = \frac{1}{\dfrac{1}{P_6+P_7}+\dfrac{1}{P_{12}}};$$

$$l_{cp}^{\Omega_4^1} = \frac{P_8(H_8+d_8)+P_9(H_9+d_9)}{P_8+P_9}+d_{13};\; P_{l_{cp}}^{\Omega_4^1} = \frac{1}{\dfrac{1}{P_8+P_9}+\dfrac{1}{P_{13}}}.$$

На втором этапе вычисляем $l_{cp}^{\Omega_1^2}$, $l_{cp}^{\Omega_2^2}$, $P_{l_{cp}}^{\Omega_1^2}$, $P_{l_{cp}}^{\Omega_2^2}$:

$$l_{cp}^{\Omega_1^2} = \frac{P_{l_{cp}}^{\Omega_1^1}(l_{cp}^{\Omega_1^1})+P_{l_{cp}}^{\Omega_2^1}(l_{cp}^{\Omega_2^1})}{P_{l_{cp}}^{\Omega_1^1}+P_{l_{cp}}^{\Omega_2^1}}+d_{14};\; P_{l_{cp}}^{\Omega_1^2} = \frac{1}{\dfrac{1}{P_{l_{cp}}^{\Omega_1^1}+P_{l_{cp}}^{\Omega_2^1}}+\dfrac{1}{P_{14}}};$$

$$l_{cp}^{\Omega_2^2} = \frac{P_{l_{cp}}^{\Omega_3^1}(l_{cp}^{\Omega_3^1})+P_{l_{cp}}^{\Omega_4^1}(l_{cp}^{\Omega_4^1})}{P_{l_{cp}}^{\Omega_3^1}+P_{l_{cp}}^{\Omega_4^1}}+d_{15};\; P_{l_{cp}}^{\Omega_2^2} = \frac{1}{\dfrac{1}{P_{l_{cp}}^{\Omega_3^1}+P_{l_{cp}}^{\Omega_4^1}}+\dfrac{1}{P_{15}}}.$$

Наконец, на последнем, третьем этапе вычисляем:

$$l_{cp} = l_{cp}^{\Omega_1^3} = \frac{P_{l_{cp}}^{\Omega_1^2}(l_{cp}^{\Omega_1^2})+P_{l_{cp}}^{\Omega_2^2}(l_{cp}^{\Omega_2^2})}{P_{l_{cp}}^{\Omega_1^2}+P_{l_{cp}}^{\Omega_2^2}}+d_{16};\; P_{l_{cp}} = \frac{1}{\dfrac{1}{P_{l_{cp}}^{\Omega_1^2}+P_{l_{cp}}^{\Omega_2^2}}+\dfrac{1}{P_{16}}}.$$

В завершение заметим, что в соответствии с работой [4]:

$$m_{l_{cp}}^2 = \frac{\mu^2}{P_{l_{cp}}},$$

где $\mu^2 = \dfrac{v^r Q_c^{-1} v}{n-1}$, поэтому:

$$m_{l_{cp}}^2 = \frac{\mu}{\sqrt{P_{l_{cp}}}} = \sqrt{\frac{\mu^2}{P_{l_{cp}}^{\Omega_1^2}+P_{l_{cp}}^{\Omega_2^2}}+\frac{\mu^2}{16}} = \sqrt{\frac{1}{\dfrac{1}{m_{l_{cp}}^2\Omega_1^2}+\dfrac{1}{m_{l_{cp}}^2\Omega_2^2}}+m^2\left(\Delta\Omega_1^3\right)}.$$

В заключение следует отметить, что получены новые формулы для расчета обобщенной средней коррелированных измерений, не требующие обращения ковариационной матрицы измерений. При этом для разветвленных сетей нивелирования разработан итерационный метод расчета обобщенной средней, также не требующий обращения ковариационной матрицы.

Список литературы / References

1. Волков В.И., Севергин С.М. Исследование влияний вертикальных движений земной коры на устойчивость энергетических объектов // Геодезия и картография. 1989. № 2. С. 23–26.

Volkov V.I., Severgin S.M.Investigation of the influence of vertical movements of the earth's crust on the stability of energy objects // Geodeziya i kartografiya. 1989. № 2. P. 23–26 (in Russian).

2. Волков В.И., Волкова Т.Н., Митягин С.Д. Новый подход к математической обработке результатов повторных геодезических наблюдений, используемых в архитектурно-строительной практике // Вестник гражданских инженеров. 2015. № 6 (53). С. 216–221.

Volkov V.I., Volkova T.N., Mityagin S.D. A new approach to the mathematical processing of the results of repeated geodetic observations used in architectural and construction practice // Vestnik grazhdanskih inzhenerov. 2015. № 6 (53). P. 216–221 (in Russian).

3. Герасименко М.Д., Каморный В.М. Уравниваниеповторных геодезических измерений при наличии систематических ошибок // Геодезия и картография. 2014. № 9. С. 6–8.

Gerasimenko M.D., Kamornyj V.M. Adjustment of repeated geodetic measurements in the presence of systematic errors // Geodeziya i kartografiya. 2014. № 9. P. 6–8 (in Russian).

4. Гордеев А.В. Об обобщенной средней результата измерений // Известия вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 1986. № 2. С. 30–35.

Gordeev A.V. About the generalized average measurement result // Izvestiya vuzov «Geodeziya i aerofotosiemka». 1986. № 2. P. 30–35 (in Russian).

5. Губбайдуллина Р.А. Модельное определение координат точек геодезических сетей на основе использования относительных значений их элементов: дис. …канд. техн. наук. Санкт-Петербург, 2020. 171 с.

Gubbajdullina R.A. Model determination of coordinates of points of geodetic networks based on the use of relative values of their elements: dis. …kand. tekhn. nauk. Sankt-Peterburg, 2020. 171 p.

6. Маркузе Ю.И., Лэ Ань Куонг, Чан Тиен Ранг, Исследование исходной матрицы обратных весов неизвестных при рекуррентном способе уравнивания измерений // Геодезия и картография. 2016. № 11. С. 7–10.

Markuze Y.I., Le An' Kuong, CHan Tien Rang, Investigation of the original matrix of inverse weights of unknowns with a recursive method of equalizing measurements // Geodeziya i kartografiya. 2016. № 11. P. 7–10 (in Russian).