

УДК 504.064.2:502.2.08:551.4.044:528.854.2:519.876.5

## ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫСОТЫ ОТ УСТЬЯ В ХАРАКТЕРНЫХ ТОЧКАХ ПРОДОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ РУСЛА МАЛОЙ РЕКИ ИРОВКА

Мазуркин П.М., Георгиева Я.О.

*Поволжский государственный технологический университет, Йошкар-Ола,  
e-mail: kaf\_po@mail.ru, yanageorgieva2017@yandex.ru*

Цель статьи – анализ асимметричных вейвлетов изменения координаты – приведенной к руслу р. Ировка местной высоты, а также влияния на неё местной широты и долготы 290 характерных точек вдоль русла реки от истока до устья. После идентификации общего уравнения вейвлета получены 12 членов в виде асимметричных вейвлетов с переменными амплитудой и периодом колебания. Первые три члена дали коэффициент корреляции 0,9993, что чуть меньше, чем для широты 0,9999, но больше, чем для долготы 0,9991. В итоге все три координаты имеют сильнейшую факторную связь с адекватностью более 0,999. Все 12 вейвлетов распределяют 95,52% точек русла при погрешности моделей до 5%. Первый член формулы распределения погрешностей в 290 точках русла реки является законом Лапласа (Мандельброта, Ципфа – Перла, Парето) экспоненциального спада, а второе уравнение показывает стрессовое возбуждение количества погрешностей по биотехническому закону. Сравнение показало, что для широты получено 25 фрактальных членов, для долготы 18 и для высоты 12 вейвлетов. В итоге высота как фактор также проявляет высокую определенность в квантовании волновых уравнений. Нулевой ранг при фрактальном распределении 12 вейвлетов получает среднее арифметическое значение. Стандартное отклонение снижается от 12,219 для среднеарифметического до 1,489, то есть в 8,2 раза, для первого члена. После 12-го вейвлета, по правилу три-сигмы, образуется разбросочек в 0,3 м, что намного меньше фактической погрешности измерений  $\pm 0,5$  м для высоты по космическим снимкам.

**Ключевые слова:** малая река, космический снимок, русло, точки, высота, распределения, вейвлеты

## WAVELET ANALYSIS OF HEIGHT DISTRIBUTION AT CHARACTERISTIC POINTS OF THE LONGITUDINAL PROFILE OF THE CHANNEL OF THE RIVER IROVKA

Mazurkin P.M., Georgieva Ya.O.

*Volga State University of Technology, Yoshkar-Ola, e-mail: kaf\_po@mail.ru,  
yanageorgieva2017@yandex.ru*

The purpose of the article is to analyze asymmetric wavelets of changing the coordinate — the local elevation of the Irovka river channel, as well as the influence of local latitude and longitude on it of 290 characteristic points along the river channel from source to mouth. After identifying the general wavelet equation, 12 terms were obtained in the form of asymmetric wavelets with variable amplitude and oscillation period. The first three members gave a correlation coefficient of 0.9993, which is slightly less than for latitude 0.9999, but more than for longitude 0.9991. As a result, all three coordinates have the strongest factorial relation with an adequacy of more than 0.999. All 12 wavelets distribute 95.52% of the points of the channel with a model error of up to 5%. The first term of the error distribution formula at 290 points of the river bed is the Laplace (Mandelbrot, Zipf-Perl, Pareto) law of exponential decline, and the second equation shows the stress excitation of the number of errors according to the biotechnical law. The comparison showed that 25 fractal terms were obtained for latitude, 18 for longitude, and 12 wavelets for altitude. As a result, height as a factor also shows high certainty in the quantization of wave equations. A zero rank in the fractal distribution of 12 wavelets receives an arithmetic mean value. The standard deviation decreases from 12.219 for the arithmetic mean to 1.489, that is, 8.2 times, for the first term. After the 12th wavelet, according to the tri-sigma rule, a spread of 0.3 m is formed, which is much less than the actual measurement error of 0.5 m for height from satellite images.

**Keywords:** small river, satellite image, channel, points, height, distribution, wavelets

Математико-геоморфологическое моделирование эрозионных ландшафтов с применением геоинформационной среды и космических снимков высокого разрешения дает возможность выявить основные характеристики ландшафтов в режиме реального времени и использовать их как основу для теоретических и экспериментальных исследований эколого-геоморфологических процессов. Таким образом, мы получаем современный инструмент изучения процессов, определяющих состояние и степень развития ландшафтов [1].

Продольный профиль руслового потока всегда имеет серии ступеней или, вернее, пологих волнообразных изгибов, не вызывающих разрыва непрерывности подобно порогам и водопадам. Ступенчатость как обязательная особенность русловых потоков отмечалась большинством исследователей [2]. Но волновых уравнений до сих пор не было получено.

Цель – анализ асимметричных вейвлетов распределений высоты от истока до устья по 290 характерным точкам и влияния широты и долготы малой реки Ировка.

### Материалы и методы исследования

По космическим снимкам были измерены координаты (широта, долгота, высота) по рекомендациям [3].

На линии стрежня малой реки выбираются характерные точки от истока до устья по резким изменениям продольного профиля малой реки, например, при повороте русла в любую сторону в плане более 10–15°. По результатам измерений составляется таблица данных для моделирования методом идентификации устойчивых закономерностей [4].

В табл. 1 даны измерения координат и их сравнение с моделями:  $\varepsilon_{12}$  – остатки после 12-й составляющей (1);  $\Delta$  – относительная погрешность.

Гипсометрическая характеристика – одно из важнейших свойств рельефа. По степени приподнятости поверхности суши над уровнем океана выделяют *низменный* (абсолютная высота от 0 до 200 м) рельеф [5, с. 24–25]. Река Ировка относится к низменному уровню, в устье высота равна 89 м, а в истоке высота достигает 148 м над уровнем Балтийского моря [6].

Колебания (вейвлет-сигналы) записываются волновой формулой [4] вида

$$y_i = A_i \cos(\pi x / p_i - a_{8i}),$$

$$A_i = a_{1i} x^{a_{2i}} \exp(-a_{3i} x^{a_{4i}}),$$

$$p_i = a_{5i} + a_{6i} x^{a_{7i}}, \quad (1)$$

где  $y$  – показатель (зависимый фактор),  $i$  – номер составляющей модели (1),  $m$  – количе-

ство членов в общей модели (1),  $x$  – объясняющая переменная (влияющий фактор),  $a_1 \dots a_8$  – параметры модели (1), принимающие различные числовые значения в процессе структурно-параметрической идентификации в программной среде CurveExpert-1.40,  $A_i$  – амплитуда (половина) вейвлета (ось  $y$ ),  $p_i$  – полупериод колебания (ось  $x$ ).

### Результаты исследования и их обсуждение

На рис. 1 приведена пространственная гипсометрическая кривая по 290 характерным точкам изменения местной высоты от устья до истока реки в зависимости от местной широты и долготы.

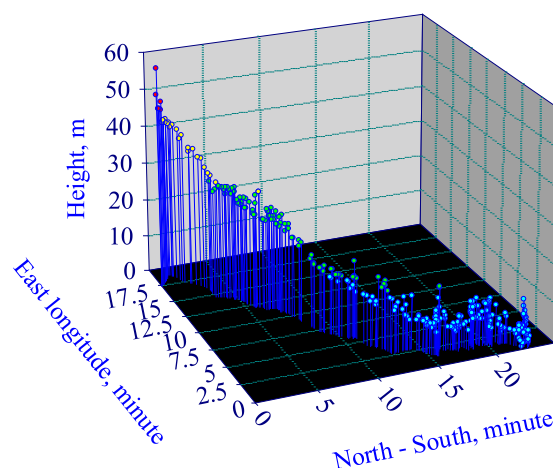


Рис. 1. Пространственная гипсометрия реки Ировка по влиянию местной широты и долготы на высоту

Таблица 1

Ранговые распределения высоты характерных точек русла р. Ировка

Ранг точки	Ранг $R_n$	Широта $\alpha$ , минута	Долгота $\beta$ , минута	Высота $h$ , м	Расчетные значения от ранга		
					$h$ , м	$\varepsilon_{12}$ , м	$\Delta$ , %
0	0	0	17.39	59	59.1	0.123212	0.21
1	1	0.02	17.50	52	52.0	-0.0367244	-0.07
2	3	0.19	17.62	48	48.0	0.0170352	0.04
3	3	0.2	17.67	48	48.0	0.0170352	0.04
4	3	0.27	17.64	48	48.0	0.0170352	0.04
5	6	0.55	17.95	47	47.0	-0.0354557	-0.08
...	...	...	...	...	...	...	...
286	247	23.83	1.970	4	4.0	-0.00580508	-0.15
287	247	23.84	2.019	4	4.0	-0.00580508	-0.15
288	269	23.87	2.035	2	2.1	0.0747201	3.74
289	286	23.89	2.017	0	-0.4	-0.422514	$-\infty$

Модель  $h = f(\beta, \alpha)$  получена исходя из условия, что вначале выявляют однофакторные модели, а затем их составляют по повышению коэффициента корреляции как меры адекватности выявленных закономерностей.

В табл. 2 приведены значения параметров (1) по двум членам влияния местной долготы на высоту, а в остатки от второго члена как влияющей переменной поставлены значения местной широты из данных табл. 1. На рис. 2 даны графики двух факторов.

Малая река Ировка по гипсометрической картине на рис. 1 протекает в прямоугольнике 23.89 минут длиной (по местной широте Север-Юг) и 18.89 минут шириной (по местной долготе). Резкие изменения кривизны русла в плане по 290 характерным точкам дали волновые уравнения по данным табл. 2. Первое уравнение влияния долготы показывает, что по мере возрастания восточной долготы происходит увеличение высоты реки по показатель-

му закону. Из картины на рис. 1 видно, что увеличение высоты происходит от меньшей долготы (ближе к устью) до наибольшей долготы (ближе к истоку). При этом второе волновое уравнение показывает, что амплитуда возрастает по экспоненциальному закону роста, а полупериод колебания возрастает от 42.76 ранга при минимальной долготе.

Дополнительно влияние широты на высоту по третьему члену происходит по закону экспоненциального роста от истока до устья. Поэтому спад высоты происходит в основном из-за уменьшения местной долготы. Это зависит от восточного склона Вятского увала.

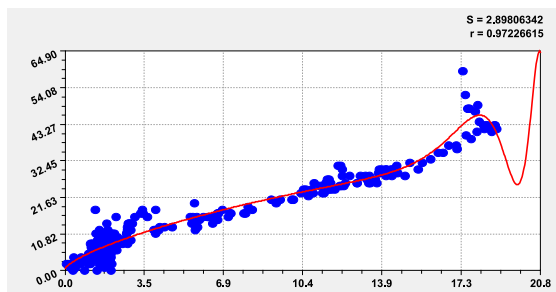
Этот третий член из табл. 2 является законом Лапласа (в математике), Мандельброта (в физике), Ципфа – Перла (в биологии) и Парето (в эконометрике). У закона  $a_{4i} = 1$ .

После идентификации общей модели (1) было получено 12 вейвлетов рангового распределения местной высоты (табл. 3, рис. 3–5).

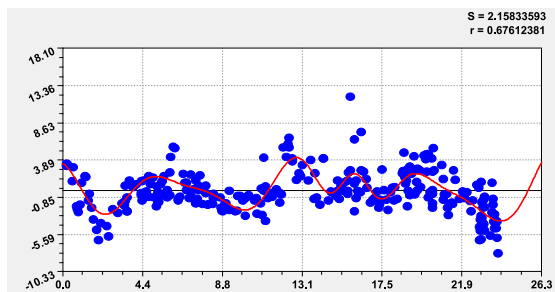
Таблица 2

Влияние долготы и широты от истока до устья на высоту р. Ировка

Фактор и номер $i$	Вейвлет $y_i = a_{1i}x^{a_{2i}} \exp(-a_{3i}x^{a_{4i}}) \cos(\pi x / (a_{5i} + a_{6i}x^{a_{7i}}) - a_{8i})$								Коэф. кор. $r$
	Амплитуда (половина) колебания				Полупериод колебания			Сдвиг	
	$a_{1i}$	$a_{2i}$	$a_{3i}$	$a_{4i}$	$a_{5i}$	$a_{6i}$	$a_{7i}$	$a_{8i}$	
$\beta_1$	4.58566	0.73085	0	0	0	0	0	0	0.9723
$\beta_2$	2.03445	0	-1.75365e-5	3.90439	42.76414	1.60613	1.03524	-1.26285	
$\alpha_1$	2.30115	0	-0.026287	1	2.86126	0.019765	1	0.007428	0.6761
$\alpha_2$	5.55135e-130	165.9377	10.02393	1	0.039078	0.019846	1	2.21030	
$\alpha_3$	1.54657	0	0	0	2.28105	0.0017154	1	-0.77225	



Влияние местной долготы



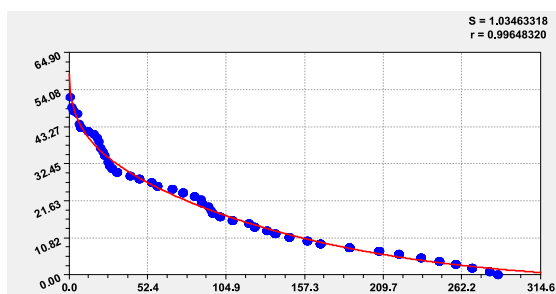
Дополнительно влияние местной широты

Рис. 2. Влияние долготы и широты от истока до устья на высоту русла р. Ировка

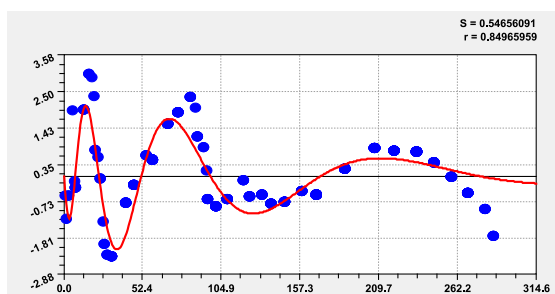
Таблица 3

Параметры вейвлетов рангового распределения местной высоты р. Ировка

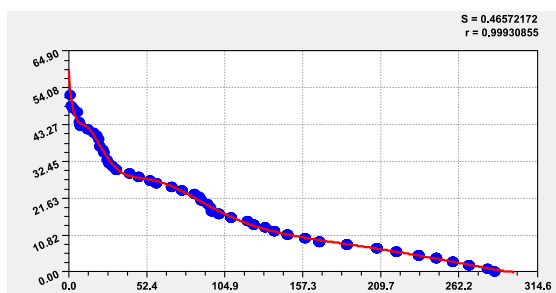
Номер <i>i</i>	Вейвлет $y_i = a_{1i}x^{a_{2i}} \exp(-a_{3i}x^{a_{4i}}) \cos(\pi x / (a_{5i} + a_{6i}x^{a_{7i}}) - a_{8i})$								Коэф. кор. <i>r</i>
	Амплитуда (половина) колебания				Полупериод колебания			Сдвиг	
	$a_{1i}$	$a_{2i}$	$a_{3i}$	$a_{4i}$	$a_{5i}$	$a_{6i}$	$a_{7i}$		
1	58.87679	0	0.00088082	1.09926	0	0	0	0	0.9993
2	-6.38434	0.48652	0.070117	0.46505	0	0	0	0	
3	3.47327	0.84367	1.36494	0.26690	4.78474	0.51777	0.78599	5.06935	
4	0.458135	0.692074	0.459628	0.418576	5.06960	0.168685	0.838476	8.53040	0.7594
5	9.3361e-7	4.10453	0.0650157	1	3.73444	0.0408429	0.489883	0.194488	0.3095
6	0.394701	1.23562	0.447487	0.682474	3.12365	0.551263	0	0	0.4576
7	0.781908	1.36008	0.256209	1.03850	3.16303	0.0119643	2.26069	2.1713	0.4440
8	3.18333e-11	6.49697	0.0664222	1	10.78055	0.0254631	0.996656	1.18507	0.6270
9	6726.89934	2.21488	14.79868	0.0997817	4.67037	0.00824933	1.19103	-1.11802	0.4141
10	5.0896e-9	4.247939	0.00189252	1.53230	1.47780	0	0	0.257972	0.3900
11	5.2799e-12	21.44634	2.22290	1	0.832376	0	0	3.50578	0.2969
12	3.27713e-47	2941689	0.214460	1.07043	1.05525	0	0	2.34453	0.5136



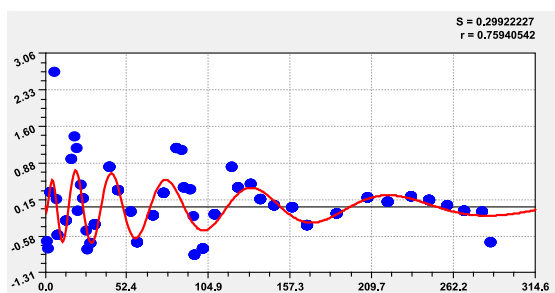
Двухчленный тренд



Колебание



Двухчленный тренд и колебание

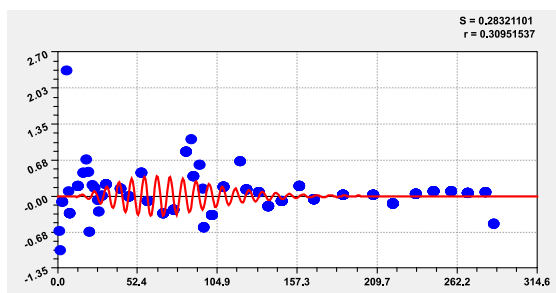


Четвертая составляющая

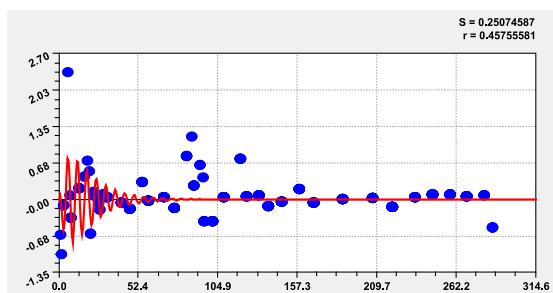
Рис. 3. Графики тренда и двух колебаний рангового распределения высоты р. Ировка

Первые три вейвлета дали по возможностям программной среды CurveExpert-1.40 коэффициент корреляции 0,9993. Первый член есть модифицированный нами закон Лапласа или Мандельброта [4] при условии  $a_{4i} \neq 1$ , и он показывает экспоненциальное снижение средней высоты двух берегов от истока до устья. Второй член показывает снижение высоты по биотех-

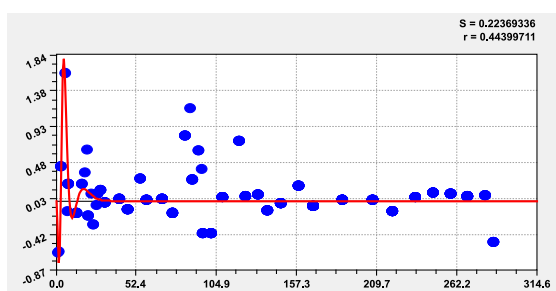
ническому закону [4] примерно к середине длины реки. Приблизительно два первых члена образуют тренд изменения линии водной поверхности малой реки (рис. 3). Остальные 10 волн (рис. 4 и рис. 5) показывают из-за положительного знака, колебательную адаптацию рельефа к возрастанию высоты. Первые два колебания показывают успокоение рельефа от истока.



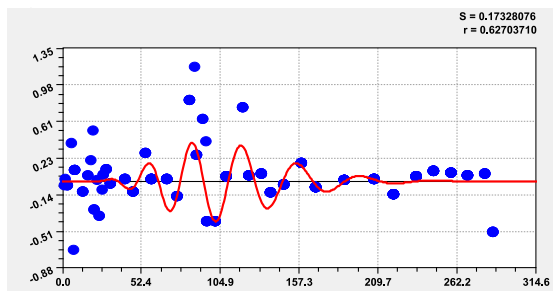
*Пятая составляющая*



*Шестая составляющая*

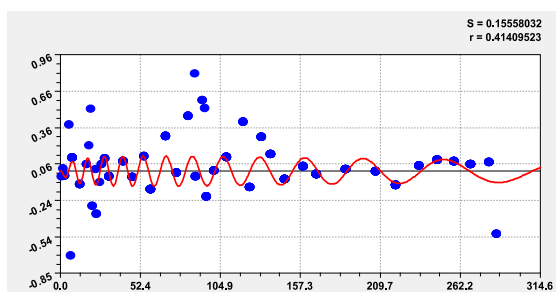


*Седьмая составляющая*

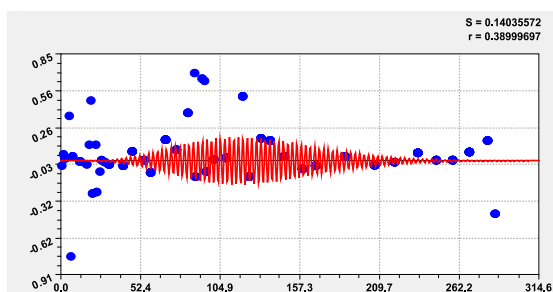


*Восьмая составляющая*

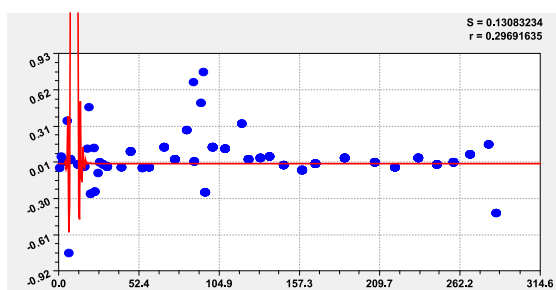
Рис. 4. Графики моделей рангового распределения высоты р. Ирвук



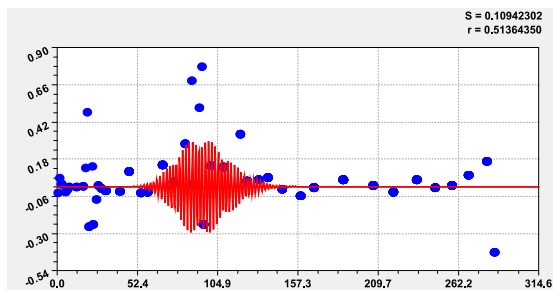
*Девятая составляющая*



*Десятая составляющая*



*Одиннадцатая составляющая*



*Двенадцатая составляющая*

Рис. 5. Графики последних моделей рангового распределения высоты р. Ирвук

Остальные восемь членов показывают локальное изменение высоты рельефа реки. Таким образом, высота вдоль малой реки изменяется, как широта и долгота, волнообразно, на что, конечно же, влияют колеблющиеся расстояния в плане и по высоте между характерными точками вдоль стрежня малой реки Ировка.

На рис. 4 и 5 заметны несколько коротких по характерным точкам вейвлетов. При этом члены № 6, 7 и 11 показывают сильную флюктуацию рельефа на верховье малой реки. При спаде уровня водности около истока летом ныне происходит пересыхание русла.

Дальнейшая идентификация модели (1) затрудняется, поэтому процесс выявления закономерностей останавливаем. Остатки меньше погрешности измерений  $\pm 0,5$  м.

Четыре точки (с рангами 252, 263, 266 и 289) из-за  $h = 0$  дали бесконечную погрешность. По интервалам 0.1 погрешность распределилась так (по модулю): при нуле 9 шт. (3,10%); 0–0,1 % 46 шт. (15,86%); 0,1–0,2 % 59 шт. (20,34%); 0,2–0,3 % 11 шт. (3,79%); 0,3–0,4 % 29 шт. (10%); 0,4–0,5 % 7 шт. (2,41%) и т.д. По крупным интервалам: 0–1,0 % всего точек 203 шт. (70%); от 0 до 5 % 277 точек, что равно 95,52 % от 290 характерных точек. Норму погрешности измерений и моделирования примем 5 %, тогда оставшиеся  $290 - 277 = 13$  точек продольного профиля русла требуют отдельного рассмотрения.

На рис. 6 приведен график распределения погрешности модели по формуле

$$n = 9.00800 \exp(-2.47276 \Delta_{0.1}) + 84.75096 \Delta_{0.1}^{0.20200} \exp(-2.54418 \Delta_{0.1}). \quad (2)$$

Первый член (2) является законом Лапласа экспоненциального спада, а второе уравнение показывает стрессовое возбуж-

дение [4] количества погрешностей. Сравнение показало, что модель (1) для широты получила 25 членов, для долготы 18 и для высоты 12 членов.

Таблица 4  
Динамика  $S$ , м

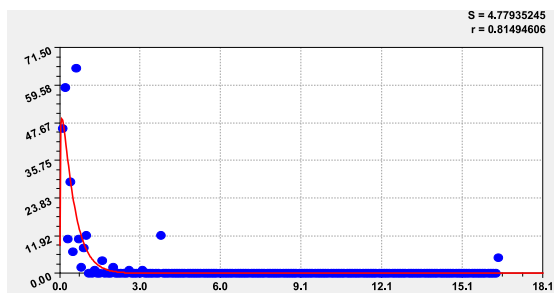
Ранг вейвлета $i$	Ст. отклонение $S$
0	12,219
1	1,489
2	1,035
3	0,466
4	0,299
5	0,283
6	0,251
7	0,224
8	0,173
9	0,156
10	0,140
11	0,131
12	0,109

В правом верхнем углу графиков на рисунках приведены значения среднего квадратичного отклонения (стандартного отклонения)  $S$ . В табл. 4 даны ранги вейвлетов и расчетные значения фактического распределения стандартного отклонения.

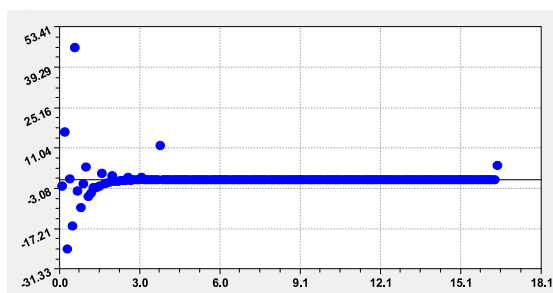
Нулевой ранг получает уравнение  $y = a$  среднего арифметического значения. Первый ранг имеет первый член по табл. 3. Стандартное отклонение снижается от 12,219 для среднеарифметического уравнения до 1,489, то есть в 8,2 раза. После 12-го вейвлета трехкратное отклонение образует 0,3 м, что намного меньше фактической погрешности измерений  $\pm 0,5$  м.

После идентификации (1) получена формула

$$S = 12.21824 \exp(-2.51054i) + 1.68900i^{2.35427} \exp(-1.18462i). \quad (3)$$



Двучленный тренд погрешности



Остатки после тренда

Рис. 6. Графики распределения погрешности моделирования высоты р. Ировка



Первый член является снова законом Мандельброта и поэтому показывает некрatное фрактальное распределение всех 12 вейвлетов.

Из остатков на рисунке видно, что третьим членом к формуле (3) станет асимметричный вейвлет. Это доказывает, что квантование высоты рельефа по фракталам может иметь не только некрatное значение, но даже происходит по волновым уравнениям.

### Заклучение

Моделирование распределений приведенной к малой реке высоты позволило получить 12 вейвлетов с распределением 95,52% точек при погрешности моделирования до 5%. Первый член формулы распределения погрешностей в 290 точках русла реки является законом Лапласа экспоненциального спада, а второе уравнение показывает стрессовое возбуждение [4] количества погрешностей. Сравнение показало, что модель (1) для широты получила 25 членов, для долготы 18 и для высоты 12 членов.

Первые три члена модели высоты дали коэффициент корреляции 0,9993, уровень адекватности более 0,9 или сильнейшей связи. Остальные 9 члена повышают уровень адекватности почти до 1. В итоге высота как фактор проявляет определенность в квантовании.

Нулевой ранг при фрактальном распределении получает уравнение  $y = a$  среднего арифметического значения. Стандартное отклонение снижается от 12,219 для среднеа-

рифметического уравнения до 1,489, то есть в 8,2 раза. После 12-го вейвлета трехкратное отклонение (правило три-сигмы) образует 0,3 м, что намного меньше фактической погрешности измерений  $\pm 0,5$  м для высоты по космическим снимкам.

### Список литературы / References

1. Рулев А.С., Юфев В.Г. Математическое и геоморфологическое моделирование эрозионных ландшафтов // Геоморфология. 2016. № 3. С. 36–45. DOI: 10.15356/0435-4281-2016-3-36-45.
2. Rulev A.S., Yuferev V.G. Mathematical and geomorphological modeling of the erosion landscapes // Geomorfologiya. 2016. № 3. P. 36–45 (in Russian).
3. Маккавеев Н.И. Русло реки и эрозия в ее бассейне. М.: Изд. АН СССР, 1955. 346 с.
4. Makkaveev N.I. River bed and erosion in its basin. M.: Izd. AN SSSR, 1955. 346 p. (in Russian).
5. Карты высот, уклонов. [Электронный ресурс]. URL: <http://votetovid.ru/#56.201192,48.95536,17z,51v30l> (дата обращения: 02.11.2019).
6. Maps of heights, slopes. [Electronic resource]. URL: <http://votetovid.ru/#56.201192,48.95536,17z,51v30l> (date of access: 02.11.2019) (in Russian).
7. Mazurkin P.M. Wavelet Analysis Statistical Data. Advances in Sciences and Humanities. 2015. Vol. 1. No. 2. P. 30–44. DOI: 10.11648/j.ash.20150102.11.
8. Рычагов Г.И. Геоморфология. Учебник для академического бакалавриата. 4-е изд. М.: Юрайт, 2018. 396 с.
9. Levers G.I. Geomorphology. Textbook for academic undergraduate. M.: Yurayt, 2018. 396 p. (in Russian).
10. Георгиева Я.О., Мазуркин П.М. Изменение кривизны русла малой реки Ировка по космическим снимкам // SCI-ARTICLE.RU. 2019. [Электронный ресурс]. URL: <http://sci-article.ru/stat.php?i=1574276162> (дата обращения: 16.11.2019).
11. Georgiev Ya.O., Mazurkin P.M. Changing the curvature of the channel of the small river Irovka from satellite imagery // SCI-ARTICLE.RU. 2019. [Electronic resource]. URL: <http://sci-article.ru/stat.php?i=1574276162> (date of access: 16.11.2019) (in Russian).