

УДК 622

ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОРОД И ГРУНТОВ ПО ИХ ОБЪЕМНОМУ СОСТАВУ

¹Кравчук А.С., ²Смалюк А.Ф., ³Славашевич С.И., ⁴Мисников В.А.

¹Белорусский государственный университет, Минск, e-mail: ask_belarus@inbox.ru;

²Белорусский национальный технический университет, Минск;

³ОАО «БЕЛАРУСЬКАЛИЙ», Солигорск;

⁴НПУП «Институт горного дела», Солигорск

Впервые предлагается использовать структурно-феноменологический подход, основанный на построении иерархической модели усреднения механических характеристик, для расчета НДС различных по размеру фрагментов земной толщи. Установлено, что отличительной особенностью уравнений состояния горной породы в рамках теории упругости является отсутствие известной связи между эффективными модулем сдвига, модулем Юнга и коэффициента Пуассона. Впервые предложен метод теоретической оценки линейризованных механических свойств горных пород или почв для трех независимых параметров (модуля Юнга почвы, модуля сдвига, коэффициента Пуассона). В работе впервые получены эффективные уравнения динамики горной породы в перемещениях на основе упругих уравнений состояния в среднем изотропной среды с тремя независимыми эффективными модулями, имеющими одинаковые значения во всех трех направлениях. Установлено, что структура уравнений полностью сохраняется такой же, как и в однородном случае для однородного тела с точностью до замены деформаций, напряжений и перемещений на средние по представительному объему горной породы или почвы величины. При этом в качестве усредненных упругих характеристик необходимо использовать независимо полученные средние значения по Хиллу модуля Юнга, модуля сдвига, коэффициента Пуассона и плотности. Установлено, что теоретическое определение эффективной скорости распространения волны в горном массиве существенно зависит от всех трех параметров (эффективных модуля Юнга, модуля сдвига и коэффициента Пуассона). Исследования, изложенные в данной статье, позволяют определять эффективные свойства пород и почв по результатам подбора значений модуля Юнга горного массива по измеренным перемещениям уже существующего объекта.

Ключевые слова: эффективные механические характеристики горной породы, упругое изотропное тело с тремя независимыми модулями, механика композиционных материалов, геомеханика

THEORY OF DETERMINATION OF LINEARIZED MECHANICAL CHARACTERISTICS OF ROCKS AND SOILS BY THEIR VOLUME COMPOSITION

¹Kravchuk A.S., ²Smaluk A.F., ³Slavashevich S.I., ⁴Misnikov V.A.

¹Belarusian State University, Minsk, e-mail: ask_belarus@inbox.ru;

²Belarusian National Technical University, Minsk;

³JSC «BELARUSKALIY», Soligorsk;

⁴NPUP «Institute of Mining», Soligorsk

A structural-phenomenological approach based on a hierarchical model of averaging mechanical characteristics for calculating the stress-strain state of various fragments of the Earth's strata is proposed. The distinctive feature of the equations of state of a rock within the framework of the elasticity theory is the absence of a known connection between the effective shear modulus, Young's modulus, and Poisson's ratio. A method for a theoretical evaluation of linearized mechanical properties of rocks or soils for three independent parameters (soil Young's modulus, shear modulus, Poisson's ratio) is proposed. The effective equations of rock dynamics in displacements were obtained on the basis of elastic equations of state in an average isotropic medium with three independent effective modules having the same values in all three directions. The structure of the equations is completely preserved the same as in the homogeneous case with up to the replacement of deformations, stresses and displacements with averaged values over the representative volume of the rock or soil. As the averaged elastic characteristics is necessary to use independently obtained Hill's average values on the of the Young's modulus, shear modulus, Poisson's ratio and density. The theoretical definition of the effective wave velocity in the rocks or soils significantly depends on all three parameters (effective Young modulus, shear modulus, and Poisson's ratio). The studies allow us to determine the effective properties of rocks and soils based on the results of selection of values of the Young's modulus of a rock or soil for displacements of already existing object.

Keywords: effective mechanical characteristics of the rock, elastic isotropic body with three independent modules, mechanics of composite materials, geomechanics

Методика определения механических свойств пород и грунтов должна в определенном виде учитывать геологический состав горной породы на любой глубине, так как состав породы обычно обладает большим разнообразием и разбросом свойств

компонент породы по механическим характеристикам. Поэтому в настоящее время общепринятым является описание механических свойств пород и грунтов как квазиизотропных, т.е. сред изотропных в среднем. Обоснованием этого заключения является

прямая аналогия между структурой горной породы или почвы и структурой композиционных материалов [1].

Однако, несмотря на это уже устоявшееся представление о механике горных пород, как одного из вариантов механики композиционных материалов, на текущий момент не существует четких рекомендаций по использованию тех или иных методик оценки средних механических характеристик представительного объема породы или грунта по их составу. Это связано прежде всего с тем, что до недавнего времени попросту не было создано даже удовлетворительного математического аппарата теоретического усреднения свойств многокомпонентных смесей. Только после появления основополагающих работ [2, 3], которые довели до логического конца методику Хилла, основанную на оценках Фойгта и Рейсса, стало возможно говорить о создании целостной инженерной методики, как расчетного прогнозирования эффективных свойств горных массивов и почв, так и обоснованного применения этих усреднений в расчетах в геомеханике.

Разработанная в рамках проекта программы союзного государства «Недра» методика позволит отказаться от испытаний горной породы для выяснения механических характеристик, а ограничиться выяснением объемных долей компонент, присутствующих в породе (сухих песка, глины, камня, органических включений и отдельно объема воды) по результатам бурения. Используя механические характеристики каждой из компонент в отдельности, можно будет по результатам определения их объемных долей вычислить прогнозируемые физические значения. В связи с разнообразием свойств перечисленных компонент на этом этапе создания модели следует ограничиться линейным квазиупругим приближением уравнения состояния как грунта или породы, так и их компонент, предполагая, что даже вода является упругой и ее коэффициент Пуассона ориентировочно равен 0,45.

Впервые в рамках предложенной методики предлагается использовать структурно-феноменологический подход, основанный на построении иерархической модели усреднения механических характеристик, используемых их для расчета НДС различных по размеру фрагментов земной толщи. Так для расчета оседаний дневной поверхности необходимо усреднять механические характеристики по всему объему

толщи породы над выработкой, а для расчета НДС слоя соли над выработкой для повышения точности расчета целесообразно выполнять усреднение механических характеристик исключительно по геологическому составу солевого пласта с заменой веса породы над выделенным фрагментом солевого пласта соответствующей распределенной нагрузкой.

Предлагаемая авторами методика является обобщением уже известных результатов, полученных в работах [4–6], где по факту продемонстрирован метод определения эффективных квазиизотропных характеристик всего горного массива над выработкой по результатам обчета измеренных вертикальных сдвижений существующего объекта без определения концентраций компонент на разных горизонтах.

В рамках построения общей теории квазиупругого поведения горных пород, при анализе литературных источников был установлено [4–6], что эффективный модуль сдвига для горного массива не является вычисляемой величиной через эффективные модуль упругости и коэффициент Пуассона, а требует отдельного определения для достижения необходимой точности совпадения расчетных величин оседания поверхности с экспериментально полученными на уже существующих объектах.

Например, при усреднении механических характеристик всей массы горной породы для определения сдвижения дневной поверхности (самой иерархически крупной модели) будем исходить из закона Кулона – Мора, определяющего пластическое поведение материала горной породы на поверхностях пластического сдвига [7, 8]:

$$\tau = \sigma \cdot \operatorname{tg}(\alpha) + c,$$

где τ , σ – величины касательных и нормальных напряжений, α – угол внутреннего трения, c – сцепление.

Приняв, что в толще породы, удаленной как от поверхности, так и от выработки, исследователь имеет дело с одноосным напряженным состоянием, создаваемым силой тяжести породы, выделим ромбовидный элемент (рис. 1). Можно утверждать, что касательные напряжения, действующие на границе выделенного ромбовидного элемента (рис. 1), ориентированного вдоль направления первого главного напряжения (единственного отличного от нуля напряжения, действующего в толще), с достаточной точностью не зависят от деформаций, изменяющих углы при вершинах указанного эле-

мента (рис. 1), а следовательно, не зависят от деформаций сдвига. В вычислительном смысле это означает, что для самой иерархически крупной модели следует уменьшить значение эффективного модуля сдвига $\langle G \rangle$ для всей толщи до незначительной по сравнению с отношением $\frac{\langle E \rangle}{2 \cdot (1 + \langle \nu \rangle)}$ (где $\langle E \rangle$ – эффективного модуля Юнга, $\langle \nu \rangle$ – эффективный коэффициент Пуассона), например до 5% от отношения $\frac{\langle E \rangle}{2 \cdot (1 + \langle \nu \rangle)}$ (но не более 10%, как это установлено в [4–6]).

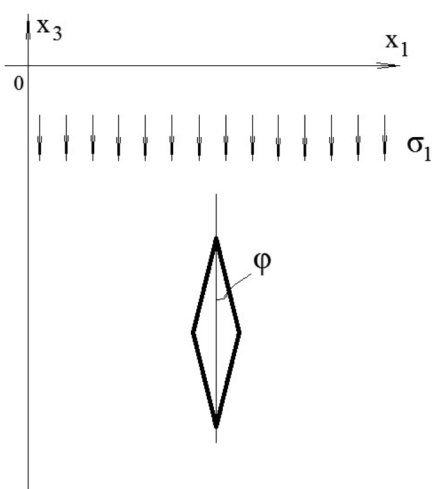


Рис. 1. Выделение ромбовидного элемента горной породы в области однородного распределения напряжений, которая удалена как от дневной поверхности, так и от выработки

Поэтому, на взгляд авторов, получивших аналогичные результаты для расчетов сдвижения дневной поверхности для существующей горизонтальной выработки на Солигорском месторождении, в общую методику решения геомеханических задач необходимо внести существенные изменения в отличие от машиностроения:

– либо при вычислении сдвижения дневной поверхности (иерархически самой крупной модели) считать, что эффективный модуль сдвига всей толщи породы малой величиной по сравнению с эффективным модулем Юнга;

– либо в случае иерархического моделирования относительно малого фрагмента горной породы (например, вокруг выработки) считать эффективный модуль сдвига породы или почвы величиной независимо

определяемой из экспериментальных данных наравне с эффективным модулем Юнга и коэффициентом Пуассона;

– использовать для расчетов напряженного состояния горного массива и/или почвы с помощью стандартного программного обеспечения эффективную ортотропную модель с тремя одинаковыми эффективными модулями по всем направлениям, т.е. в этой модели эффективные модули Юнга, сдвига и коэффициент Пуассона являются независимо определяемыми, но одинаковыми величинами для всех трех направлений.

В связи с этим в известную методику определения эффективных характеристик композиционных сред [2, 3] внесены упрощения, позволяющие как довести методику до инженерного уровня, не сильно потеряв в точности определения механических характеристик горного массива, так и использовать ее для определения трех независимых упругих характеристик горных массивов – эффективных модуля Юнга, модуля сдвига и коэффициента Пуассона.

На основе разработанной авторами методики [2, 3] в данной статье выведены уравнения Ламе динамики горного массива для решения задач в смысле средних по представительному объему породы напряжений и перемещений. Установлено, что теоретическое определение эффективной скорости распространения волны в горном массиве существенно зависит от всех трех параметров (эффективных модуля Юнга, модуля сдвига и коэффициента Пуассона).

Геометрические предположения

Данная работа полностью опирается на аналогию между горной породой или грунтом и композиционным в среднем изотропным телом, так как композиционный материал с зернистой структурой полностью соответствует составу грунта или горной породы в Беларуси. Именно поэтому в основе данного исследования лежат результаты авторов, полученные для композиционных тел и сред [2, 3]. Основным отличием данной работы является использование результатов линеаризации нелинейной диаграммы деформирования компонент горной породы или грунта, а также упрощенное приближение эффективных механических характеристик горных пород и грунтов с использованием приближения Хилла, которое, как установлено авторами, также является достаточно точным относительно приближения Кравчука – Тарасюка [2, 3].

Рассмотрим пространственную декартову систему координат с осями $0x_i$ ($i=1,3$). Предполагается, что горная порода или грунт занимает объем V , а точка $x \in V$ имеет три координаты $x = (x_1, x_2, x_3)$. Через функцию $u_i(x, t)$ ($i=1,3$) обозначим перемещения точки x горной породы или грунта вдоль соответствующей оси $0x_i$ (проекцию на указанное направление) в момент времени t . Отметим, что при выводе всех уравнений геомеханики исследователь использует для произвольной точки $x \in V$ описанный вокруг нее элементарный объем $dV = dx_1 \times dx_2 \times dx_3$ (где dx_i – приращение вдоль оси $0x_i$).

Линеаризация диаграммы деформирования

Предполагается, что известна наибольшая деформация горной породы или грунта ϵ_{np} , исходя из предварительных оценочных расчетов. Таким образом, задан отрезок $[0, \epsilon_{np}]$ на оси деформации. Тогда нелинейное поведение f_k каждой компоненты породы или грунта с номером k ($k=1, n$, где n – количество установленных компонент) при деформации на отрезке $[0, \epsilon_{np}]$ приближается линейной функцией с секущим модулем (рис. 2).

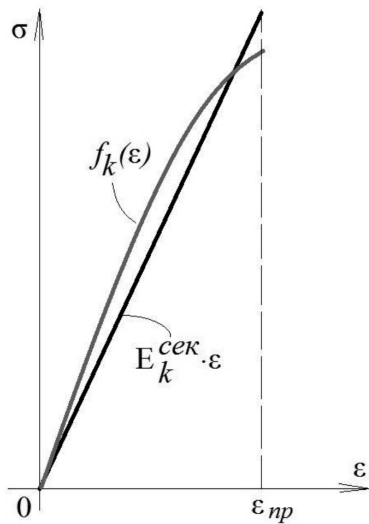


Рис. 2. Линеаризация нелинейного поведения грунта

Таким образом, предполагается, что к началу применения данной методики уже определены все секущие модули $E_k^{сек}$ компонент породы или грунта, а также определены их коэффициенты Пуассона ν_k и модуль сдвига $G_k^{сек}$.

Особенности вывода уравнений для горной породы с использованием объемных долей компонент

Будем называть представительным объемом горной породы наименьший объем, в котором физические характеристики остаются в среднем равными физическим характеристикам всего объема горного массива.

В отличие от сплошной среды уравнения не будут верны непосредственно при предельном переходе $dV \rightarrow 0$, так как в предлагаемой теории деформирования горных пород представительный объем горной породы $dV \neq 0$. Но, с другой стороны, он бесконечно мал по сравнению со всем исследуемым объемом V . Точнее, $\sqrt[3]{dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3}$ (характерный размер представительного объема) мал по сравнению с наименьшим характерным объемом фрагмента горного массива. Отметим, что во всем объеме горного массива и в элементарном представительном объеме dV концентрации компонент (объемные доли) равны γ_k (где k ($k=1, n$) – номер компоненты, при этом выполнено условие нормировки $\sum_{k=1}^n \gamma_k = 1$).

Представительный dV объем горной породы будем называть макроточкой.

Очевидно, что для каждой компоненты представительного объема неоднородного многокомпонентного твердого тела должны быть известны ее плотность ρ_k , модуль Юнга $E_k^{сек}$, коэффициент Пуассона ν_k , модуль сдвига $G_k^{сек}$.

При использовании данных гипотез план вывода уравнений для геомеханических объектов полностью сохраняется с точностью до замены понятия элементарного объема на представительный объем.

Отметим также, что в смысле формулировки объемных долей γ_k их следует рассматривать также как дискретную случайную величину присутствия компоненты породы или грунта с номером k в точке $x \in V$.

Обозначим через $\sigma_{ij}^k(x)$ и $\epsilon_{ij}^k(x)$ ($i=1,3, j=1,3$) дискретные значения напряжений и деформаций на k -й компоненте горного массива в представительном объеме. Домножая на γ_k и суммируя по k , получаем средние по реализации композиции напряжения и деформации (матожидания дискретных случайных величин):

$$\langle \sigma_{ij}(x) \rangle = \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \sigma_{ij}^k(x),$$

$$\langle \epsilon_{ij}(x) \rangle = \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \epsilon_{ij}^k(x). \quad (1)$$

Таким образом, стационарность обеспечивается требованием воспроизведения концентраций на всех уровнях объема от представительного dV до общего V . Эргодичность обеспечивается равенством среднего по реализации (1) среднему по представительному объему:

$$\langle \sigma_{ij}^k(x) \rangle = \frac{1}{\iiint_{(dV)} dx dy dz} \cdot \iiint_{(dV)} \sigma_{ij}^k(x) dx dy dz, \quad (2)$$

$$\langle \epsilon_{ij}^k(x) \rangle = \frac{1}{\iiint_{(dV)} dx dy dz} \cdot \iiint_{(dV)} \epsilon_{ij}^k(x) dx dy dz.$$

Основные формулы

для k -й компоненты горной породы

Соотношения Коши для деформаций всех включений из k -ого однородного изотропного материала (компоненты) имеют вид [3, 6]:

$$\epsilon_{ii}^k = u_{i,i}^k \quad (i = \overline{1,3}), \quad (3)$$

$$\epsilon_{ij}^k = u_{i,j}^k + u_{j,i}^k \quad (i \neq j, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}),$$

где ϵ_{ij}^k ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$) – компоненты деформаций по Коши, u_i^k – проекции вектора перемещений для компоненты горной породы с номером k , при этом $u_{i,j}^k = \frac{\partial u_i^k}{\partial x_j}$ ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$).

Для изотропных тел соотношения обобщенного закона Гука известны из курса сопротивления материалов. В принятых выше обозначениях в развернутой форме связь между компонентами тензора напряжений и деформациями по Коши имеет вид [2, 3, 6]:

$$\sigma_{11}^k = \frac{1}{E_k^{\text{сек}}} (\sigma_{11}^k - \nu_k \cdot (\sigma_{22}^k + \sigma_{33}^k)),$$

$$\sigma_{22}^k = \frac{1}{E_k^{\text{сек}}} (\sigma_{22}^k - \nu_k \cdot (\sigma_{33}^k + \sigma_{11}^k)),$$

$$\sigma_{11}^k = \frac{E_k^{\text{сек}}}{(1 + \nu_k) \cdot (1 - 2 \cdot \nu_k)} (\epsilon_{11} \cdot (1 - \nu_k) + \nu_k \cdot (\epsilon_{22} + \epsilon_{33})),$$

$$\sigma_{22}^k = \frac{E_k^{\text{сек}}}{(1 + \nu_k) \cdot (1 - 2 \cdot \nu_k)} (\epsilon_{22} \cdot (1 - \nu_k) + \nu_k \cdot (\epsilon_{11} + \epsilon_{33})), \quad (7)$$

$$\sigma_{33}^k = \frac{E_k^{\text{сек}}}{(1 + \nu_k) \cdot (1 - 2 \cdot \nu_k)} (\epsilon_{33} \cdot (1 - \nu_k) + \nu_k \cdot (\epsilon_{11} + \epsilon_{22})),$$

$$\sigma_{ij}^k = G_k^{\text{сек}} \cdot \epsilon_{ij}, \quad (i \neq j, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}).$$

$$\epsilon_{33}^k = \frac{1}{E_k^{\text{сек}}} (\sigma_{33}^k - \nu_k \cdot (\sigma_{22}^k + \sigma_{11}^k)), \quad (4)$$

$$\epsilon_{ij}^k = \frac{1}{G_k^{\text{сек}}} \sigma_{ij}^k \quad (i \neq j, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}),$$

где σ_{ii}^k ($i = \overline{1,3}$) – нормальные напряжения, σ_{ij}^k ($i \neq j, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$) – касательные напряжения.

Одними из основных уравнений механики твердого тела является система уравнений совместности, которая содержит шесть уравнений [3, 6]:

$$\epsilon_{ii,jj}^k + \epsilon_{jj,ii}^k - \epsilon_{ij,ij}^k = 0 \quad (i, j = 1, \dots, 3, i \neq j), \quad (5)$$

$$(\epsilon_{ij,m}^k - \epsilon_{jm,i}^k + \epsilon_{mi,j}^k)_{,i} - 2 \cdot \epsilon_{ii,jm}^k = 0,$$

$$(i, j, k = 1, \dots, 3, i \neq j \neq m).$$

Уравнения движения элементарного объема твердого тела с постоянной плотностью ρ можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij,j}^k - \rho_k \cdot \ddot{u}_i^k = 0 \quad (i = 1, \dots, 3), \quad (6)$$

$$\text{где } \ddot{u}_i^k = \frac{\partial^2 u_i^k}{\partial t^2}.$$

Эффективный обобщенный закон Гука для модели в среднем изотропной горной породы или почвы

На первом шаге используем гипотезу Фойгта о том, что при простейшем нагружении в макроточке горной породы имеет место однородная деформация [2, 3, 6], т.е. для любой компоненты параллелепипеда верны соотношения: $\epsilon_{ij}^k = \epsilon_{ij}$ ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$). Запишем закон Гука (4) для k -й компоненты элементарного параллелепипеда в виде

Для нахождения эффективных характеристик по Фойгту определим средние значения напряжений $\langle \sigma_{ij} \rangle^V$ ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$), действующих на все компоненты горной породы, с помощью статистического усреднения дискретных случайных величин σ_{ij}^k ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$) (7):

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{11} \rangle^V &= \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \sigma_{11}^k = \frac{\langle E^{\text{чек}} \rangle^V}{(1 + \langle v \rangle^V) \cdot (1 - 2 \cdot \langle v \rangle^V)} \left(\epsilon_{11} \cdot (1 - \langle v \rangle^V) + \langle v \rangle^V \cdot (\epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \right), \\ \langle \sigma_{22} \rangle^V &= \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \sigma_{22}^k = \frac{\langle E^{\text{чек}} \rangle^V}{(1 + \langle v \rangle^V) \cdot (1 - 2 \cdot \langle v \rangle^V)} \left(\epsilon_{22} \cdot (1 - \langle v \rangle^V) + \langle v \rangle^V \cdot (\epsilon_{11} + \epsilon_{33}) \right), \\ \langle \sigma_{33} \rangle^V &= \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \sigma_{33}^k = \frac{\langle E^{\text{чек}} \rangle^V}{(1 + \langle v \rangle^V) \cdot (1 - 2 \cdot \langle v \rangle^V)} \left(\epsilon_{33} \cdot (1 - \langle v \rangle^V) + \langle v \rangle^V \cdot (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \right), \\ \langle \sigma_{ij} \rangle^V &= \langle G^{\text{чек}} \rangle^V \cdot \epsilon_{ij}, \quad (i \neq j, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}). \end{aligned} \quad (8)$$

где усредненные значения по Фойгту $\langle E^{\text{чек}} \rangle^V$ и $\langle v \rangle^V$ в (8) определяются выражениями

$$\langle E^{\text{чек}} \rangle^V = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k \cdot E_k^{\text{чек}}}{1 + v_k} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k \cdot E_k^{\text{чек}}}{1 - 2v_k} \right) / \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k \cdot E_k^{\text{чек}}}{(1 + v_k) \cdot (1 - 2 \cdot v_k)} \right), \quad (9)$$

$$\langle v \rangle^V = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k \cdot E_k^{\text{чек}} \cdot v_k}{(1 + v_k) \cdot (1 - 2 \cdot v_k)} \right) / \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k \cdot E_k^{\text{чек}}}{(1 + v_k) \cdot (1 - 2 \cdot v_k)} \right), \quad (10)$$

$$\langle G^{\text{чек}} \rangle^V = \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot G_k^{\text{чек}}. \quad (11)$$

Далее применим гипотезу Рейсса о том, что при простейшем нагружении в представительном объеме горной породы или грунте имеет место однородное напряженное состояние [2, 3, 6], т.е. для любой компоненты выбранного параллелепипеда верны соотношения: $\sigma_{ij}^k = \sigma_{ij}$ ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$). Подставляя их в (4), запишем закон Гука для k -й компоненты элементарного параллелепипеда:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^k &= \frac{1}{E_k^{\text{чек}}} (\sigma_{11} - v_k \cdot (\sigma_{22} + \sigma_{33})), \quad \epsilon_{22}^k = \frac{1}{E_k^{\text{чек}}} (\sigma_{22} - v_k \cdot (\sigma_{11} + \sigma_{33})), \\ \epsilon_{33}^k &= \frac{1}{E_k^{\text{чек}}} (\sigma_{33} - v_k \cdot (\sigma_{11} + \sigma_{22})), \\ \epsilon_{ij}^k &= \frac{1}{G_k^{\text{чек}}} \cdot \sigma_{ij}, \quad (i \neq j, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}). \end{aligned} \quad (12)$$

Для нахождения эффективных характеристик по Рейссу определим средние значения деформаций $\langle \epsilon_{ij} \rangle^R$ ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$) по всем компонентам горной породы в элементарном параллелепипеде с помощью статистического усреднения дискретных случайных величин ϵ_{ij}^k ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$) (12):

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_{11} \rangle^R &= \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \epsilon_{11}^k = \frac{1}{\langle E^{\text{чек}} \rangle^R} (\sigma_{11} - \langle v \rangle^R \cdot (\sigma_{22} + \sigma_{33})), \\ \langle \epsilon_{22} \rangle^R &= \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \epsilon_{22}^k = \frac{1}{\langle E^{\text{чек}} \rangle^R} (\sigma_{22} - \langle v \rangle^R \cdot (\sigma_{11} + \sigma_{33})), \\ \langle \epsilon_{33} \rangle^R &= \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \epsilon_{33}^k = \frac{1}{\langle E^{\text{чек}} \rangle^R} (\sigma_{33} - \langle v \rangle^R \cdot (\sigma_{11} + \sigma_{22})), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle^R = \frac{1}{\langle G^{\text{чек}} \rangle^R} \sigma_{ij}, \quad (i \neq j, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}),$$

где усредненные значения $\langle E \rangle^R$ и $\langle \nu \rangle^R$ в (21)–(24) определяются выражениями

$$\langle E^{\text{чек}} \rangle^R = 1 / \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k^{\text{чек}}} \right), \quad (14)$$

$$\langle \nu \rangle^R = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k \cdot \nu_k}{E_k^{\text{чек}}} \right) / \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k^{\text{чек}}} \right), \quad (15)$$

$$\langle G^{\text{чек}} \rangle^R = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{G_k^{\text{чек}}} \right)^{-1}. \quad (16)$$

Как установлено в работах [2, 3, 6], эффективное приближение свойств композиционных материалов для практических целей может с достаточной точностью ограничиваться вычислением приближения Хилла модуля Юнга $\langle E^{\text{чек}} \rangle^H$, модуля сдвига $\langle G^{\text{чек}} \rangle^H$ и коэффициента Пуассона $\langle \nu \rangle^H$, полученных как среднее арифметическое значение (9)–(11), а также (14)–(16):

$$\langle E^{\text{чек}} \rangle^H = \frac{1}{2} \left(\langle E^{\text{чек}} \rangle^V + \langle E^{\text{чек}} \rangle^R \right),$$

$$\langle \nu \rangle^H = \frac{1}{2} \left(\langle \nu \rangle^V + \langle \nu \rangle^R \right), \quad (17)$$

$$\langle G^{\text{чек}} \rangle^H = \frac{1}{2} \left(\langle G^{\text{чек}} \rangle^V + \langle G^{\text{чек}} \rangle^R \right).$$

Эффективные уравнения неразрывности деформаций и движения элементарного объема в среднем изотропной упругой горной породе

Целью исследования данного раздела является обоснование того, что с помощью вычисленных эффективных значений можно решать геомеханические задачи.

Отметим также, что в силу линейности решаемой задачи для горной породы или грунта в рамках построенной модели любую динамическую задачу для весомого массива породы или почвы можно представить как простую суперпозицию решения динамической задачи для невесомой среды с механическими характеристиками породы и статической задачи для весомого слоя с теми же механическими характеристиками.

Поэтому в данном разделе рассматриваются уравнения динамики только для не-

весомого тела с механическими характеристиками породы.

Не повторяя известные результаты работы [3], посвященной механике композиционных тел, можно записать, что для представительного объема в среднем изотропной модели горной породы или грунта уравнения совместности деформаций для эффективных деформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ принимают вид

$$\langle \varepsilon_{ii} \rangle_{,jj} + \langle \varepsilon_{jj} \rangle_{,ii} - \langle \varepsilon_{ij} \rangle_{,ij} = 0$$

$$(i, j = 1, \dots, 3, \quad i \neq j), \quad (18)$$

$$\left(\langle \varepsilon_{ij} \rangle_{,m} - \langle \varepsilon_{jm} \rangle_{,i} + \langle \varepsilon_{mi} \rangle_{,j} \right)_{,i} - 2 \cdot \langle \varepsilon_{ii} \rangle_{,jm} = 0,$$

$$(i, j, m = 1, \dots, 3, \quad i \neq j \neq m).$$

Уравнения движения для эффективных напряжений $\langle \sigma_{ij} \rangle$, вычисленных для представительного объема, приобретут вид [3]:

$$\sum_{j=1}^3 \langle \sigma_{ij} \rangle_{,j} - \langle \rho \rangle^H \cdot \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial t^2} \approx 0, \quad (i = 1, \dots, 3), \quad (19)$$

где эффективную плотность породы или грунта по Хиллу $\langle \rho \rangle^H$ можно определить по формуле

$$\langle \rho \rangle^H = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \rho_k + \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{\rho_k} \right)^{-1} \right).$$

Эффективные уравнения динамики для горной породы или грунта

Уравнения (18) и (19) в совокупности с (17) позволяют методически просто повторить вывод уравнений динамики для породы или грунта с учетом дополнительного неопределенного параметра $\langle G^{\text{чек}} \rangle^H$ (модуля сдвига) по аналогии с эффективными уравнениями композиционной среды [2, 3].

Опустим вывод эффективных уравнений в напряжениях Бельтрами – Митчелла и продемонстрируем влияние третьего свободного параметра $\langle G^{\text{чек}} \rangle^H$ на уравнения Ламе.

Для вывода эффективных динамических уравнений Ламе теории упругости горной в среднем изотропной породе с тремя независимыми параметрами, $\langle E^{\text{чек}} \rangle^H$, $\langle G^{\text{чек}} \rangle^H$ и $\langle \nu \rangle^H$ в дальнейшем понадобятся обратные соотношения, когда напряжения выражены через деформации по Коши [3]:

$$\langle \sigma_{ii} \rangle \approx \frac{\langle E^{\text{чек}} \rangle^H}{(1 + \langle \nu \rangle^H)} \cdot \langle \varepsilon_{ii} \rangle + \langle \lambda^{\text{чек}} \rangle^H \cdot \langle \Theta \rangle \quad (i = 1, \dots, 3), \quad (20)$$

$$\langle \sigma_{ij} \rangle \approx \langle G^{cek} \rangle^H \cdot \langle \varepsilon_{ij} \rangle \quad (i \neq j, i, j = 1, \dots, 3),$$

$$\langle \Theta \rangle = \langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \varepsilon_{22} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle = \frac{1 - 2 \cdot \langle v \rangle^H}{\langle E^{cek} \rangle^H} (\langle \sigma_{11} \rangle + \langle \sigma_{22} \rangle + \langle \sigma_{33} \rangle) = \frac{1}{\langle K^{cek} \rangle^H} \cdot \langle \sigma \rangle,$$

где

$$\langle \lambda^{cek} \rangle^H = \frac{\langle v \rangle^H \cdot \langle E^{cek} \rangle^H}{(1 + \langle v \rangle^H) \cdot (1 - 2 \cdot \langle v \rangle^H)}, \quad \langle K^{cek} \rangle^H = \frac{\langle E^{cek} \rangle^H}{3 \cdot (1 - 2 \cdot \langle v \rangle^H)}.$$

Используя эффективные уравнения равновесия (19), эффективные уравнения обобщенного закона Гука в форме (20), а также очевидную связь средних по представительному объему (в смысле операций (1) и (2)) деформаций и перемещений в виде

$$\langle \varepsilon_{ii} \rangle = \langle u_i \rangle_{,i} \quad (i = \overline{1,3}), \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \langle u_i \rangle_{,j} + \langle u_j \rangle_{,i} \quad (i \neq j, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}),$$

можно получить эффективные уравнения Ламе, совершенно аналогично известной системе для однородного изотропного материала [3], которые можно записать с использованием оператора Лапласа в виде

$$\left(\langle \lambda^{cek} \rangle^H + \langle G^{cek} \rangle^H \right) \langle \Theta \rangle_{,i} + \langle G^{cek} \rangle^H \cdot \Delta \langle u_i \rangle + \left(\frac{\langle E^{cek} \rangle^H}{1 + \langle v \rangle^H} - 2 \cdot \langle G^{cek} \rangle^H \right) \cdot \langle u_i \rangle_{,ii} - \langle \rho \rangle^H \cdot \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial t^2} = 0. \quad (21)$$

Эта система уравнений может быть получена из соответствующей системы уравнений Ламе для упругого ортотропного материала, в котором по всем трем направлениям положения одинаковые, но независимые 3 коэффициента упругости $\langle E^{cek} \rangle^H$, $\langle G^{cek} \rangle^H$ и $\langle v \rangle^H$.

Совершенно аналогичный результат можно получить и для динамических уравнений Бельтрами – Митчелла, которые в данном случае также будут прямым следствием уравнений упругого ортотропного тела, решаемых всеми известными программами конечноэлементного анализа.

Определение скорости распространения волн в горных породах и почвах, имеющих в качестве независимых три параметра упругости

Отметим, что получение стандартного волнового уравнения, как это делалось в [3], невозможно. Однако можно использовать подход, изложенный в [9].

Предварительно продифференцируем каждое уравнение (21) по соответствующей координате x_i и сложим результаты:

$$\left(\langle \lambda^{cek} \rangle^H + 2 \cdot \langle G^{cek} \rangle^H \right) \Delta \langle \Theta \rangle_{,ii} + \left(\frac{\langle E^{cek} \rangle^H}{1 + \langle v \rangle^H} - 2 \cdot \langle G^{cek} \rangle^H \right) \cdot \sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_{ii} \rangle_{,ii} - \langle \rho \rangle^H \cdot \frac{\partial^2 \langle \Theta \rangle}{\partial t^2} = 0. \quad (22)$$

Применим метод разделения переменных для изучения волнового уравнения (22). Пусть $\varepsilon_{ii}(\mathbf{x}, t)$ можно представить в виде

$$\varepsilon_{ii}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_{ii}^0(\mathbf{x}) \cdot \varphi(t), \quad (23)$$

где

$$\varepsilon_{ii}^0(\mathbf{x}) = - \left(\frac{\Lambda}{2\pi} \right)^2 \cdot \varepsilon_{ii,jj}^0(\mathbf{x}), \quad (24)$$

$\varphi(t)$ – безразмерная функция времени, Λ – максимальная длина объемной волны.

Подставляя (23) и (24) в (22), получаем дифференциальное уравнение для $\varphi(t)$ в виде

$$\ddot{\varphi}(t) + \langle B \rangle^2 \cdot \varphi(t) = 0,$$

где $\langle B \rangle$ – эффективная циклическая частота колебаний породы или грунта, квадрат которой определяется уравнением

$$\langle B \rangle^2 = \frac{1}{\langle \rho \rangle^H} \left(\langle \lambda^{\text{сек}} \rangle^H + 2 \cdot \langle G^{\text{сек}} \rangle^H + 3 \cdot \left(\frac{\langle E^{\text{сек}} \rangle^H}{1 + \langle \nu \rangle^H} - 2 \cdot \langle G^{\text{сек}} \rangle^H \right) \right) \cdot \left(\frac{2\pi}{\Lambda} \right)^2$$

В этом случае эффективная скорость распространения объемной волны $\langle \nu \rangle$ будет определяться уравнением

$$\langle \nu \rangle = B \cdot \frac{\Lambda}{2\pi} = \sqrt{\frac{1}{\langle \rho \rangle^H} \left(\langle \lambda^{\text{сек}} \rangle^H + 2 \cdot \langle G^{\text{сек}} \rangle^H + 3 \cdot \left(\frac{\langle E^{\text{сек}} \rangle^H}{1 + \langle \nu \rangle^H} - 2 \cdot \langle G^{\text{сек}} \rangle^H \right) \right)}$$

Учитывая, гипотезу о том, что $\langle G \rangle / \left(\frac{\langle E \rangle}{2 \cdot (1 + \langle \nu \rangle)} \right) \approx 0,05$ [4–6] можно получить, для геомеханических расчетов всего массива над выработкой следует использовать другую формулу определяющую эффективную скорость волны в горной породе $\langle \nu \rangle^{\text{гео}}$ с учетом специфического пластического состояния массива, соответствующего закону Мора-Кулона на некотором удалении от поверхности Земли и границы выработки:

$$\langle \nu \rangle^{\text{гео}} \approx \sqrt{\frac{1}{\langle \rho \rangle^H} \left(\langle \lambda^{\text{сек}} \rangle^H + 3 \cdot \frac{\langle E^{\text{сек}} \rangle^H}{1 + \langle \nu \rangle^H} \right)}$$

Необходимо отметить, что найденные приближения скоростей распространения объемной волны в горной породе основаны на линеаризованных уравнениях состояния и той гипотезе, что эффективный секущий модуль Юнга $\langle E^{\text{сек}} \rangle^H$ и эффективный секущий модуль сдвига $\langle G^{\text{сек}} \rangle^H$, вычисленные по реализации линеаризованных законов деформирования компонент породы или почвы, совпадают с достаточной точностью с секущими линеаризующими модулями, полученным прямым испытанием представительного объема породы или почвы.

Заключение

Впервые предложен метод теоретической оценки линеаризованных механических свойств горных пород или почв для трех независимых параметров (модуля Юнга почвы, модуля сдвига, коэффициента Пуассона). Метод основан на линеаризации диаграммы деформирования каждой из

компонент и на применении оценки Хилла упругих свойств горной породы или почвы, по аналогии с механикой композиционных, в среднем изотропных материалов.

В работе получены эффективные уравнения динамики горной породы в перемещениях на основе упругих уравнений состояния в среднем изотропной среде с тремя независимыми эффективными модулями, имеющими одинаковые значения во всех трех направлениях. Установлено, что структура уравнений полностью сохраняется такой же, как и в однородном случае для однородного тела с точностью до замены деформаций, напряжений и перемещений на средние по представительному объему горной породы или почвы величины. При этом в качестве усредненных упругих характеристик необходимо использовать полученные средние значения по Хиллу (17) модуля Юнга, модуля сдвига, коэффициента Пуассона и плотности (19).

Установлено, что теоретическое определение эффективной скорости распространения волны в горном массиве существенно зависит от всех трех параметров (эффективных модуля Юнга, модуля сдвига и коэффициента Пуассона). Ошибка определения эффективной скорости для изотропного материала (для двух независимых параметров упругости) в 1,5 раза превосходит ошибку гипотезы о вычисляемости модуля сдвига через модуль Юнга и коэффициент Пуассона и, например, на проволоке из чугунов может достигать 30% [10].

Результаты данных исследований позволяют решать задачи геомеханики и строительства с помощью стандартного конечноэлементного обеспечения, например ANSYS.

Установлено, что при решении задач геомеханики, когда модуль Юнга, коэффициент Пуассона и модуль сдвига не связаны между собой известными соотношениями, в стандартных программах конечноэлементных расчетов следует пользоваться моделью ортотропного материала, однако следует задавать упругие характеристики в различных направлениях наборами из трех одних и тех же независимых значений (модуля Юнга, коэффициента Пуассона и модуля сдвига).

Исследования, изложенные в данной статье, позволяют определять эффективные свойства пород и почв по результатам подбора значений модуля Юнга горного массива на уже существующем объекте и использовать эти результаты в качестве прогноза при проектировании соседних аналогичных объектов, так как в этом случае при подборе значений инженер будет фактически выполнять теоретическое определение эффективных линеаризованных свойств горной среды по результатам наблюдений поведения объекта, находящегося в сходных условиях эксплуатации.

Список литературы / References

1. Петроченков Р.Г. Оценка физико-технических свойств горных пород и строительных композитов на их основе. Часть 2. Деформационные свойства горных пород и композитов в квазиизотропном приближении свойств их составляющих. М.: МГУ, 2000. 111 с.
2. Tarasjuk I.A., Kravchuk A.S. Evaluation of the physico-technical properties of rocks and building composites based on them. Part 2. Deformation properties of rocks and composites in the quasi-isotropic approximation of the properties of their components. M.: MGGU, 2000. 111 p. (in Russian).
3. Тарасюк И.А., Кравчук А.С. Вычисление эффективных параметров упругости в среднем изотропных композиционных тел в случае записи закона Гука для тензора деформаций по Коши // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки. 2015. № 3 [Электронный ресурс]. URL: <http://apriori-journal.ru/seria2/3-2015/Tarasjuk-Kravchuk.pdf> (дата обращения: 17.10.2018).
4. Tarasjuk I.A., Kravchuk A.S. Calculation of the effective elastic parameters of the average isotropic composite bodies in the case of Hooke's law for the Cauchy strain tensor // APRIORI. Serija: Estestvennye i tehniczeskie nauki. 2015. № 3 [Electronic resource]. URL: <http://apriori-journal.ru/seria2/3-2015/Tarasjuk-Kravchuk.pdf> (date of access: 17.10.2018) (in Russian).
5. Кравчук А.С., Кравчук А.И. Эффективные уравнения динамики композиционного твердого в среднем изотропно-упругого тела // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2018. № 2. С. 63–76. DOI: 10.18101/2304-5728-2018-2-63-76.
6. Kravchuk A.S., Kravchuk A.I. Effective equations of the dynamics of a composite solid for average isotropic elastic body // Vestnik Burjatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika. 2018. № 2. P. 63–76 (in Russian).
7. Гавриленко Ю.Н., Маланчук Е.О., Мотылев И.В. Численное моделирование процессов сдвижения над короткими лавами с межлавым целиком // Научные труды УкрНДМИ НАН Украины. № 3. 2008. С. 52–60.
8. Gavrilenko Ju.N., Malanchuk E.O., Motylev I.V. Numerical simulation of displacement processes over short lavas with a full head // Nauchnye trudy UkrNDMI NAN Ukrainy. № 3. 2008. P. 52–60 (in Russian).
9. Строкова Л.А. Моделирование оседания поверхности при проходке туннеля щитовым способом // Известия Томского политехнического университета. 2008. Т. 312. № 1. С. 45–50.
10. Stroková L.A. Simulation of surface subsidence during tunneling using shield method // Izvestija Tomskogo politehnicheskogo universiteta. 2008. T. 312. № 1. P. 45–50 (in Russian).
11. Гавриленко Ю.Н. Численное моделирование процессов сдвижения массива горных пород и земной поверхности методом конечных элементов в объемной постановке // Физико-технические проблемы горного производства. 2001. № 3. С. 12–25.
12. Gavrilenko Ju.N. Numerical modeling of the displacement of an array of rocks and the earth's surface using the finite element method in a volumetric formulation // Fiziko-tehnicheskie problemy gornogo proizvodstva. 2001. № 3. P. 12–25 (in Russian).
13. Садовская О.В., Садовский В.М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 368 с.
14. Sadovskaja O.V., Sadovskiy V.M. Mathematical modeling in problems of mechanics of flowing media. M.: FIZMATLIT, 2008. 368 p. (in Russian).
15. Певзнер М.Е., Иофис М.А., Попов В.Н. Геомеханика. М.: МГУ, 2008. 438 с.
16. Pevzner M.E., Iofis M.A., Popov V.N. Geomechanics. M.: MGGU, 2008. 438 p. (in Russian).
17. Кравчук А.С., Кравчук А.И., Смалюк А.Ф. Пространственные уравнения механики композиционного твердого тела для моделей вязкоупругости, содержащих в одномерном случае два упругих и один вязкий элемент // Инженерный вестник Дона. 2018. № 3 [Электронный ресурс]. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n3y2018/5155 (дата обращения: 17.10.2018).
18. Kravchuk A.S., Kravchuk A.I., Smaljuk A.F. Spatial equations of the mechanics of a composite solid for viscoelasticity models containing, in the one-dimensional case, two elastic and one viscous element // Inzhenernyj vestnik Dona. 2018. № 3 [Electronic resource]. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n3y2018/5155 (date of access: 17.10.2018) (in Russian).
19. Модуль упругости Юнга и сдвига, коэффициент Пуассона значения (таблица). Сайт InfoTables.ru [Электронный ресурс]. URL: <http://infotables.ru/fizika/295-uprugie-svoystva-tel> (дата обращения: 17.10.2018).
20. Module of elasticity of Jung and shift, Poisson's coefficient of value (table). Website InfoTables.ru [Electronic resource]. URL: <http://infotables.ru/fizika/295-uprugie-svoystva-tel> (date of access: 17.10.2018) (in Russian).