

УДК 528.8:523.4-853

## ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УГЛОВЫХ И ЧАСТОТНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ДЕКАМЕТРОВОГО РАДИОСИГНАЛА ПРИ НАКЛОННОМ ЗОНДИРОВАНИИ ИОНОСФЕРЫ

<sup>1</sup>Агеева Е.Т., <sup>2</sup>Афанасьев Н.Т., <sup>1</sup>Ким Д.Б., <sup>2</sup>Чудаев С.О.

<sup>1</sup>ФГБОУ ВО «Братский государственный университет», Братск;

<sup>2</sup>ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет», Иркутск, e-mail: spacemaklay@gmail.com

Развит аппарат математического моделирования статистических характеристик декаметрового радиосигнала на трассах наклонного зондирования ионосферы. В приближении геометрической оптики и метода малых возмущений получены двукратные интегралы по траекториям для дисперсий и функции взаимной корреляции угловых и частотных флуктуаций радиосигнала с учетом фиксированного положения пунктов излучения и приема ионозонда. Полученные двукратные интегралы сведены к однократным путем введения эффективной модели пространственно-временной корреляционной функции неоднородностей диэлектрической проницаемости ионосферы. Рассмотрено квазиоднородное по времени и по пространству случайное поле неоднородностей. Использован гауссов вид однородной части корреляционной функции с пространственным радиусом корреляции случайных неоднородностей равным внешнему масштабу ионосферной турбулентности, заданной степенным спектром. Интегральные формулы для дисперсий и функции взаимной корреляции угловых и частотных флуктуаций радиосигнала преобразованы в обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Получена система дифференциальных уравнений для численного расчета среднего вертикального угла прихода и доплеровского смещения частоты радиосигнала на трассе наклонного зондирования для произвольной аналитической модели диэлектрической проницаемости ионосферы. Сделан аналитический вывод системы дифференциальных уравнений для расчета производных по параметру, входящих в интегральные формулы для статистических моментов радиосигнала. Получена полная система дифференциальных уравнений для одновременного расчета средних и флуктуационных характеристик радиосигнала в широком диапазоне рабочих частот. Численное решение полной системы с заданными начальными условиями позволяет определить угловые и частотные флуктуации радиосигнала на трассах различной протяженности. Приведены примеры численно-аналитического моделирования статистических моментов декаметрового радиосигнала в разных ионосферных условиях.

**Ключевые слова:** неоднородности, флуктуации, ионосфера, декаметровые радиоволны, наклонное зондирование, моделирование

## NUMERICAL-ANALYTICAL MODELING OF ANGULAR AND FREQUENCY FLUCTUATIONS OF DECAMETER RADIO SIGNAL UNDER OBLIQUE SOUNDING OF IONOSPHERE

<sup>1</sup>Ageeva E.T., <sup>2</sup>Afanasev N.T., <sup>1</sup>Kim D.B., <sup>2</sup>Chudaev S.O.

<sup>1</sup>Bratsk State University, Bratsk;

<sup>2</sup>Irkutsk State University, Irkutsk, e-mail: spacemaklay@gmail.com

We develop formalism for mathematical modeling of statistical characteristics of decameter radio signal on oblique radio wave trajectories in the ionosphere. Using the geometrical optics and the method of small perturbations, we derive expressions for variances and correlation functions of angular and frequency fluctuations of a radio signal in the form of twofold path integrals. In the derivation, we take into account the positions of the sounder and receiver. We transform the obtained twofold integrals to regular integrals by introducing an effective model of spatial-temporal correlation function of dielectric permeability irregularities of the ionosphere. We further consider a field of irregularities that is quasi-homogeneous in time and space. In addition, we use a Gaussian form of the homogeneous part of the correlation function with the correlation radius equal to the outer scale of ionospheric turbulence described by a power-law spectrum. We then transform the derived integral expressions to first-order ordinary differential equations. We obtain a set of differential equations suitable for a numerical computation of the mean vertical angle of arrival and the frequency Doppler shift for a radio signal propagating obliquely in the ionosphere, assuming an arbitrary analytical model of dielectric permeability of the ionosphere. We also derive analytically differential equations for parametric derivatives entering integral expressions for statistical moments of the radio signal. We obtain a closed set of differential equations, with which the mean and fluctuation characteristics of the radio signal can be computed simultaneously in a wide range of working frequencies. Numerical solution of this closed set with given initial conditions allows one to determine angular and frequency fluctuations of the radio signal for trajectories of variable lengths. We present examples of the numerical-analytical modeling of statistical moments of a decameter radio signal under various ionospheric conditions.

**Keywords:** irregularities, fluctuations, ionosphere, decameter radio waves, oblique propagation, modeling

Как известно [1], измерения угловых и частотных флуктуаций декаметрового радиосигнала, отраженного от ионосферы, можно использовать для исследования тонкой структуры околоземной плазмы.

Между тем для успешной постановки экспериментов по изучению ионосферных неоднородностей целесообразно предварительно рассчитать ожидаемые величины этих флуктуаций на разных рабочих ча-

стотах на системе трасс. Сделать строгие аналитические расчеты флуктуаций характеристик сигнала при наклонном зондировании случайно-неоднородной ионосферы не представляется возможным. В этом случае для решения задачи можно применить имитационное моделирование, основанное на методе Монте-Карло [2]. Однако при использовании метода статистических испытаний на трассах наклонного зондирования существует большая проблема, связанная с тем, что для каждой реализации случайной функции диэлектрической проницаемости ионосферы необходимо решать краевую задачу электродинамики. Последнее требует больших вычислительных ресурсов для проведения расчетов. Более того, метод Монте-Карло не позволяет установить функциональные связи между флуктуациями характеристик сигнала и параметрами ионосферных неоднородностей.

Альтернативным вариантом расчета статистических характеристик сигнала являются приближенные аналитические методы теории случайных полей [3], использующие физические представления о корреляционных свойствах тонкой структуры ионосферы. Результатом применения приближенных методов обычно являются сложные интегральные выражения для статистических моментов флуктуационных характеристик сигнала. Использование этих выражений для моделирования и интерпретации реальных данных измерений ионозонда требует разработки специальных численных алгоритмов.

Цель работы заключается в развитии аппарата численно-аналитического моделирования угловых и частотных флуктуаций декаметрового радиосигнала для интерпретации данных измерений на трассах наклонного зондирования ионосферы.

#### Основные теоретические соотношения

Для расчета угловых и частотных флуктуаций радиосигнала в ионосфере используем стохастические дифференциальные уравнения лучевого приближения [3]:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= c\sqrt{\varepsilon} \cos\beta, \quad \frac{dx}{dt} = c\sqrt{\varepsilon} \sin\beta, \\ \frac{d\Delta\omega}{dt} &= -\frac{\omega}{2} \frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}, \\ \frac{d\beta}{dt} &= c \frac{\partial\sqrt{\varepsilon}}{\partial x} \cos\beta - c \frac{\partial\sqrt{\varepsilon}}{\partial z} \sin\beta, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $z, x, \beta$  – характеристики луча;  $\Delta\omega$  – доплеровский сдвиг частоты,  $\varepsilon$  – случайная функция диэлектрической проницаемости ионосферы,  $dt$  – элемент группового времени запаздывания. Решения уравнений (1) получим с помощью метода малых возмущений [3] с учетом фиксированного положения пунктов излучения и приема ионозонда. Введем представление:

$$\varepsilon = \varepsilon_0(z, \tau) + \varepsilon_1(z, x, \tau), \quad (2)$$

где  $\varepsilon_0$  – средняя составляющая,  $\varepsilon_1$  – малая случайная компонента, характеризующая ионосферные неоднородности ( $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_0$ ,  $\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial\tau} \ll \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\tau}$ ),  $\tau$  – время. Решения уравнений (1) будем искать в виде

$$z = z_0 + z_1, \quad x = x_0 + x_1, \quad \beta = \beta_0 + \beta_1,$$

$$\Delta\omega = \Delta\omega_0 + \Delta\omega_1, \quad (3)$$

где  $z_0, x_0, \beta_0, \Delta\omega_0$  – соответственно текущие координаты траектории сигнала, угол рефракции и доплеровский сдвиг частоты в средней ионосфере;  $z_1, x_1, \beta_1, \Delta\omega_1$  – флуктуации характеристик сигнала, вызванные случайными неоднородностями.

Подставляя (2), (3) в уравнения (1) и проводя асимптотические разложения, имеем

$$\frac{dz_0}{dt} = c\sqrt{\varepsilon_0} \cos\beta_0, \quad \frac{dx_0}{dt} = c\sqrt{\varepsilon_0} \sin\beta_0, \quad \frac{d\beta_0}{dt} = -c \frac{\partial\sqrt{\varepsilon_0}}{\partial z} \sin\beta_0, \quad \frac{d\Delta\omega_0}{dt} = -\frac{\omega}{2} \frac{\partial\varepsilon_0}{\partial\tau}, \quad (4)$$

$$\frac{dz_1}{dt} = -c\sqrt{\varepsilon_0} \beta_1 \sin\beta_0 + c \cos\beta_0 \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_0}} \frac{\partial\varepsilon_0}{\partial z_0} z_1 + c \cos\beta_0 \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_0}}, \quad \frac{d\Delta\omega_1}{dt} = -\frac{\omega}{2} \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\tau},$$

$$\frac{dx_1}{dt} = c\sqrt{\varepsilon_0} \beta_1 \cos\beta_0 + c \sin\beta_0 \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_0}} \frac{\partial\varepsilon_0}{\partial z_0} z_1 + c \sin\beta_0 \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_0}}, \quad (5)$$

$$\frac{d\beta_1}{dt} = -c \frac{\partial\sqrt{\varepsilon_0}}{\partial z_0} \beta_1 \cos\beta_0 - c \sin\beta_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_0}} \frac{\partial\varepsilon_0}{\partial z_0} \right) z_1 - c \sin\beta_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \right) + c \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \right) \cos\beta_0.$$

Получить аналитические решения детерминированных нелинейных уравнений (4) с заданными краевыми условиями в случае произвольной функции  $\varepsilon_0(z)$  не представляется возможным, однако эти уравнения можно решить методами численного интегрирования [2]. Между тем для определения флуктуаций угла прихода и доплеровского смещения частоты радиосигнала в приемном пункте ионозонда можно решить линейную неоднородную систему стохастических дифференциальных уравнений (5) с краевыми условиями,  $x_1(0) = x_1(t_k) = 0$ ,  $z_1(0) = z_1(t_k) = 0$ ,  $\Delta\omega_1(0) = 0$ . Применяя для решения системы (5) метод Лагранжа [4], в случае пологих траекторий сигнала в средней ионосфере, получаем

$$\beta_1(t_k) = \frac{c}{2 \cdot \frac{\partial z_0}{\partial \beta_H}(t_k)} \cdot \int_0^{t_k} \frac{1}{\sin \beta_H} \frac{\partial z_0}{\partial \beta_H}(t) \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z_0} dt, \quad (6)$$

$$\Delta\omega_1(t_k) = -\frac{\omega}{2} \int_0^{t_k} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \tau} \cdot dt, \quad (7)$$

где  $\beta_H = \beta(0)$  – угол выхода луча в пункте излучения ионозонда. Составляя на основе (6), (7) выражения для статистических моментов и проводя усреднение по ансамблю неоднородностей, для дисперсии вертикального угла прихода и доплеровского сдвига частоты радиосигнала в приемном пункте ионозонда имеем

$$\sigma_\beta^2 = \frac{c^2}{4 \left[ \frac{\partial z_0}{\partial \beta_H}(t_k) \right]^2} \iint_{00}^{t_k t_k} \frac{1}{\sin^2 \beta_H} \frac{\partial z_0}{\partial \beta_H}(t_1) \cdot \frac{\partial z_0}{\partial \beta_H}(t_2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z_1 \cdot \partial z_2} dt_1 dt_2, \quad (8)$$

$$\sigma_\omega^2 = \frac{\omega^2}{4} \iint_{00}^{t_k t_k} \left\langle \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau_1 \cdot \partial \tau_2} \right\rangle dt_1 dt_2, \quad (9)$$

где  $\Psi(z_1, z_2, x_1, x_2, \tau_1, \tau_2)$  – корреляционная функция случайного поля неоднородностей ионосферы. Полагая, что поле неоднородностей обладает свойствами квазистационарности и квазиоднородности, а движение неоднородностей можно учесть в рамках гипотезы о переносе заморозенной турбулентности [3], функцию корреляции зададим в виде

$$\Psi = \Psi_1 \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right) \cdot \exp \left( -\frac{1}{a^2} \left[ (x_1 - x_2)^2 + (z_1 - z_2 - v(\tau_1 - \tau_2))^2 \right] \right), \quad (10)$$

где  $a$  – пространственный радиус корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости, равный внешнему масштабу турбулентности ионосферы [5]. Считая, что внешний масштаб турбулентности ионосферы  $a$  мал по сравнению с масштабом изменения функции  $\Psi_1$  и толщиной ионосферы, интегралы (8), (9) можно вычислить асимптотически:

$$\sigma_\beta^2 = \frac{\sqrt{\pi} \cdot c}{2 \left[ \frac{\partial z_0}{\partial \beta_H}(t_k) \right]^2} \int_0^{t_k} \frac{\Psi_1}{a \cdot \sqrt{\varepsilon_0^3}} \cdot \left( \frac{\partial z_0}{\partial \beta_H}(t) \right)^2 dt, \quad (11)$$

$$\sigma_\omega^2 = \frac{\omega^2 \cdot \sqrt{\pi}}{2} \int_0^{t_k} \frac{v^2 \cdot \Psi_1 \sin^2 \beta_0}{a \cdot c \sqrt{\varepsilon_0}} dt, \quad (12)$$

где интегрирование проводится по суммарной переменной  $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ . Для интерпретации данных измерений ионозонда представляет интерес статистическая связь флуктуаций сигнала во времени и в пространстве. Составляя на основе выражений (6), (7) смешанный статистический момент для функции взаимной корреляции и проводя вычисления при тех же предположениях, что и при выводе (11), (12), получаем

$$P_{\Delta\omega\beta_1} = \frac{\omega \sqrt{\pi} \cdot \sin \beta_H}{2 \frac{\partial z_0}{\partial \beta_H}(t_k)} \cdot \int_0^{t_k} \frac{v \cdot \Psi_1}{a \cdot \sqrt{\varepsilon_0^3}} \cdot \frac{\partial z_0}{\partial \beta_H}(t) dt. \quad (13)$$

Считая в интегралах (11)–(13) верхний предел переменным и дифференцируя их по верхнему пределу, получим обыкновенные дифференциальные уравнения для определения статистических моментов  $\sigma_\beta^2, \sigma_\omega^2, P_{\Delta\omega\beta}$ . Записывая полученные уравнения совместно с уравнениями (4) и добавляя к ним дифференциальные уравнения для определения функций  $z_0, \beta_0$ , продифференцированных по начальному параметру  $\beta_H$ , получим полную систему уравнений для одновременного расчёта средних и флуктуационных характеристик вертикального угла прихода и доплеровского сдвига частоты радиосигнала на трассе наклонного зондирования ионосферы. Эта система имеет следующий вид:

$$\frac{dx_0}{dt} = c\sqrt{\varepsilon_0} \sin\beta_0, \quad \frac{dz_0}{dt} = c\sqrt{\varepsilon_0} \cos\beta_0, \quad \frac{d\beta_0}{dt} = -\frac{c \cdot \sin\beta_0}{2\sqrt{\varepsilon_0}(z_0)} \frac{\partial\varepsilon_0(z_0)}{\partial z_0}, \quad \frac{d\Delta\omega_0}{dt} = -\frac{\omega}{2} \frac{\partial\varepsilon_0}{\partial\tau},$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z_0}{\partial\beta_H} \right) = \frac{c \cdot \cos\beta_0}{2\sqrt{\varepsilon_0}} \cdot \frac{\partial\varepsilon_0}{\partial z_0} \cdot \frac{\partial z_0}{\partial\beta_H} - c\sqrt{\varepsilon_0} \cdot \sin\beta_0 \cdot \frac{\partial\beta_0}{\partial\beta_H}, \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\beta_0}{\partial\beta_H} \right) = -\frac{c}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \frac{\partial^2\varepsilon_0}{\partial z_0^2} - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_0^3}} \left( \frac{\partial\varepsilon_0(z_0)}{\partial z_0} \right)^2 \right) \frac{\partial z_0}{\partial\beta_H} \sin\beta_0 - \frac{c}{2\sqrt{\varepsilon_0}} \frac{\partial\varepsilon_0(z_0)}{\partial z_0} \cos\beta_0 \cdot \frac{\partial\beta_0}{\partial\beta_H},$$

$$\frac{dD_\beta}{dt} = \frac{\psi_1}{a \cdot \sqrt{\varepsilon_0^3}} \cdot \left( \frac{\partial z_0}{\partial\beta_H}(t) \right)^2, \quad \frac{dD_{\omega\beta}}{dt} = \frac{v_z \cdot \psi_1}{a \cdot \sqrt{\varepsilon_0^3}} \cdot \frac{\partial z_0}{\partial\beta_H}(t), \quad \frac{d\sigma_\omega^2}{dt} = \frac{\omega^2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot v^2 \cdot \psi_1 \cdot \sin^2\beta_0}{2a \cdot c \cdot \sqrt{\varepsilon_0}},$$

$$\text{где } D_\beta = \frac{2 \cdot \sigma_\beta^2}{\sqrt{\pi} \cdot c} \left( \frac{\partial z_0}{\partial\beta_H}(t_k) \right)^2, \quad D_{\omega\beta} = \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot \omega \cdot \sin\beta_H} \cdot \frac{\partial z_0}{\partial\beta_H}(t_k) \cdot P_{\Delta\omega\beta}.$$

#### Математическое моделирование и обсуждение результатов расчетов

Для демонстрации работы предложенного аппарата численно-аналитического моделирования на рис. 1, 2 в качестве примера приведены результаты расчетов на основе системы (14) угловых и частотных флуктуаций радиосигнала на трассах различной протяженности. При моделировании среднеквадратичного отклонения флуктуаций угла прихода в пункте приема ионозонда  $\sigma_\beta(x_k)$  средняя диэлектрическая проницаемость ионосферы представлялась двухслойной моделью:

$$\varepsilon_0 = 1 - \chi \frac{f_{\text{кр}e}^2}{f^2} \exp\left(-\left(\frac{z - z_{me}}{y_{me}}\right)^2\right) - \frac{f_{\text{кр}e}^2}{f^2} \exp\left(-\left(\frac{z - z_m}{y_m}\right)^2\right), \quad (15)$$

где  $\chi$  – параметр включения нижней ионизации,  $z_{me}, y_{me}, f_{\text{кр}e}$  – высота минимума диэлектрической проницаемости (максимума электронной концентрации), полутолщина и критическая частота слоя  $E$  соответственно;  $z_m, y_m, f_{\text{кр}}$  – высота максимума, полутолщина и критическая частота слоя  $F2$ . Неоднородная часть корреляционной функции задавалась в виде:  $\psi_1 = \alpha^2 (1 - \varepsilon_0)^2$ , где  $\alpha^2$  – интенсивность неоднородностей электронной концентрации. На рис. 1 представлены значения  $\sigma_\beta$  на трассах различной протяженности для нескольких рабочих частот зондирования. При моделировании задавались следующие типичные параметры ионосферного слоя  $F2$ :  $z_m = 300$  км,  $y_m = 100$  км,  $f_{\text{кр}} = 6$  МГц. Нижележащий слой  $E$  был представлен параметрами:  $z_{me} = 125$  км,  $y_{me} = 25$  км,  $f_{\text{кр}e} = 3$  МГц. При расчетах параметры неоднородностей составляли:  $a = 10$  км,  $\alpha^2 = 0,008$ . Из рис. 1 следует, что в однослойной ионосфере ( $\chi = 0$ ) при заданной рабочей частоте в окрестности некоторого угла выхода радиосигнала  $\beta_H$  происходит увеличение угловых флуктуаций  $\sigma_\beta$  в пункте приема ионозонда. Это связано с тем, что данная рабочая частота приближается к окрестности максимально-применимой частоты (МПЧ) радиотрассы, длина которой определяется углом выхода  $\beta_H$ . В случае полного совпадения рабочей частоты и МПЧ радиотрассы для выбранного угла выхода  $\beta_H$ , величина  $\sigma_\beta$  сильно возрастает, что связано с уменьшением в этих условиях знаменателя у коэффициента перед интегралом в формуле (11).

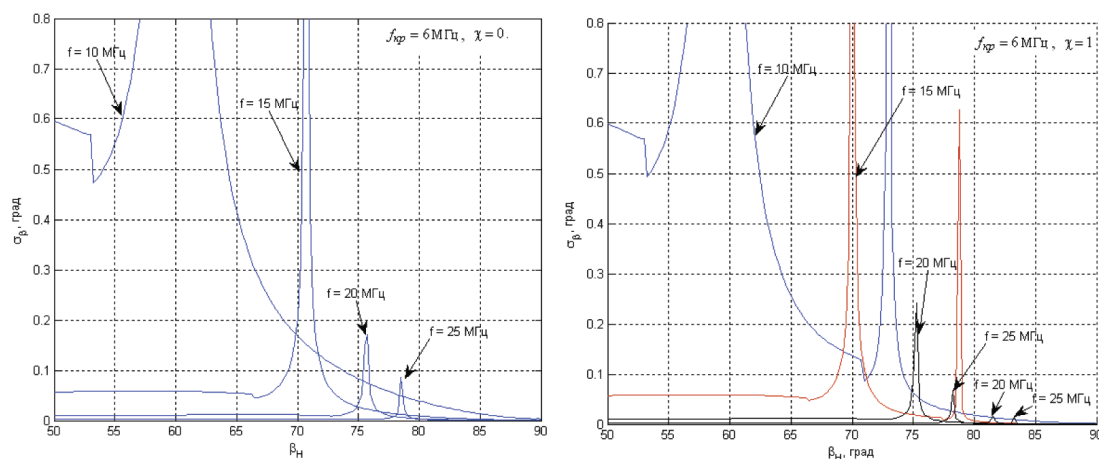


Рис. 1. Среднеквадратичное отклонение вертикального угла прихода на трассах наклонного зондирования однослойной ( $\chi = 0$ ) и двухслойной ( $\chi = 1$ ) ионосферы для различных рабочих частот,  $\alpha^2 = 0,008$ ,  $a = 10$  км

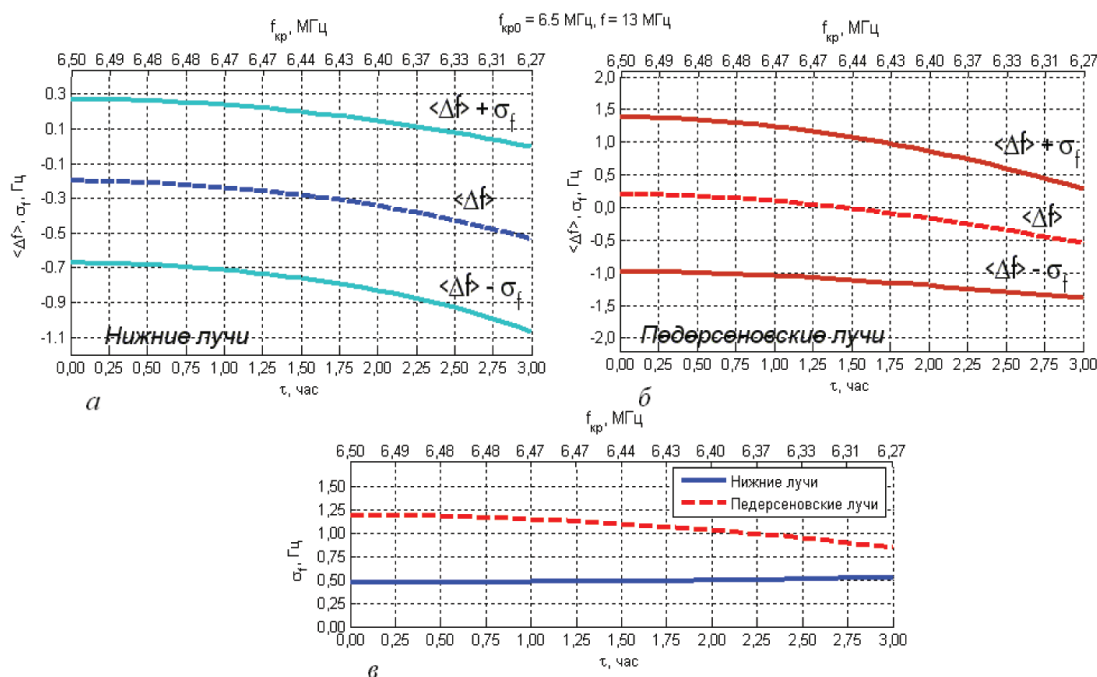


Рис. 2. Частотные флуктуации дециметрового радиосигнала ( $f = 13$  МГц) на однокачковой радиотрассе протяженностью  $X = 1500$  км, при  $\chi = 0$ ,  $v = 0,1$  км/с,  $a = 10$  км,  $\alpha^2 = 0,0004$

Угловые флуктуации радиосигнала отличаются на трассах различной протяженности и существенно зависят от рабочей частоты. С увеличением рабочей частоты максимальные значения  $\sigma_\beta$  возникают на более высоких частотах, что связано с увеличением длины трассы, соответствующей МПЧ. При распространении сигнала на

разных рабочих частотах в двухслойной ионосфере ( $\chi = 1$ ), в зависимости  $\sigma_\beta$  от угла выхода возникают дополнительные максимумы. Их появление связано с отражением радиосигнала от нижнего слоя ионосферы. Расчеты частотных флуктуаций дециметрового радиосигнала на трассе наклонного зондирования нестационарной

случайно-неоднородной ионосферы были выполнены для модели (15), в которой отсутствовал нижний слой  $E$  ( $\chi = 0$ ), а критическая частота слоя  $F2$  изменялась от времени по закону:  $f_{кр}(\tau) = f_{кр0} - b\tau^2$ , где  $f_{кр0}$  – критическая частота в начальный момент времени  $\tau = 0$ ,  $b$  – размерный параметр. На рис. 2 представлены результаты расчета среднеквадратичного  $\sigma_f = \frac{\sigma_\omega}{2\pi}$  и среднего  $\langle \Delta f \rangle = \frac{\Delta\omega_0}{2\pi}$  доплеровского смещения

частоты радиосигнала на трассе протяженностью  $X = 1500$  км. При этом рабочая частота составляла  $f = 13$  МГц, скорость вертикального движения поля неоднородностей –  $v = 0,1$  км/с, масштаб неоднородностей  $a = 10$  км. Численные значения параметров средней ионосферы составляли:  $z_m = 300$  км,  $h_m = 100$  км,  $f_{кр0} = 6,5$  МГц. Из рис. 2 следует, что на фиксированной однокачковой трассе вследствие временных вариаций критической частоты ионосферы происходят изменения длины нижних и верхних траекторий радиосигнала. Последнее оказывает существенное воздействие на значения частотных флуктуаций и среднего доплеровского сдвига рабочей частоты. Так уменьшение со временем критической частоты слоя  $F2$  влечет за собой существенно разное поведение верхней и нижней траекторий, а именно, длина верхней траектории сокращается, а длина нижней растет. Вследствие этого эффекта в пункте приема ионозонда с течением времени будет фиксироваться рост частотных флуктуаций нижней моды. Между тем для Педерсеновской моды частотные флуктуации будут уменьшаться со временем. Важно заметить, что в нестационарной ионосфере средние значения доплеровского сдвига частоты нижней и Педерсеновской мод могут оказаться не только существенно разными по количественным значениям, но противоположными по знаку.

### Заключение

Для интерпретации данных измерений угловых и частотных флуктуаций декаметровых радиосигналов на трассах наклонного зондирования ионосферы развит аппарат математического моделирования статистических моментов этих флуктуаций с использованием аналитических и чис-

ленных методов. В качестве модели тонкой структуры околоземной плазмы использована эффективная модель пространственно-временной корреляционной функции, характеризующей квазиоднородное по пространству и по времени случайное поле неоднородностей. Движение случайных неоднородностей учтено в рамках гипотезы о переносе замороженной турбулентности. В качестве модели высотного профиля электронной концентрации ионосферы может быть произвольная аналитическая функция. На основе приближения геометрической оптики и метода малых возмущений получена система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для одновременного численного расчета средних значений, дисперсий и функции взаимной корреляции вертикального угла прихода и доплеровского сдвига частоты декаметрового радиосигнала в широком диапазоне рабочих частот на трассе наклонного зондирования. Проведенное численно-аналитическое моделирование на основе полученной системы уравнений для типичных ионосферных условий показало хорошую работоспособность предложенного математического аппарата, и его можно использовать для расчетов статистических моментов угловых и частотных флуктуаций декаметрового радиосигнала на трассах различной протяженности.

### Список литературы / References

1. Яковлев О.И., Якубов В.П., Урядов В.П., Павелев А.Г. Распространение радиоволн. М.: ЛЕНАНД, 2009. 496 с.
2. Demidovich B.P., Yakubov V.P., Uryadov V.P., Paveliev A.G. Radio wave propagation. M.: LENAND, 2009. 496 p. (in Russian).
3. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. СПб.: Лань, 2011. 672 с.
4. Demidovich, B.P., Maron I.A. Basics of numerical computations. SPb.: Lan', 2011. 672 p. (in Russian).
5. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения: теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике. М.: Физматлит, 2008. Т. 1. 317 с.
6. Klyatskin V.I. Stochastic equations: theory and its application to acoustics, hydrodynamics and radiophysics. M.: Fizmatlit, 2008. V. 1. 317 p. (in Russian).
7. Коддингтон Э.А., Левинсон Н.Р. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ЛКИ, 2010. 472 с.
8. Koddington E.A., Levinson N.R. Theory of ordinary differential equations. M.: LKI, 2010. 472 p. (in Russian).
9. Afanasiev N.T., Afanasiev A.N., Larunin O.A., Markov V.P. Phase fluctuations of radio waves experiencing total reflection from a randomly inhomogeneous plasma layer // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 2010. V. 72. Issue 7–8. P. 583–587. DOI: 10.1016/j.jastp.2010.02.014.