

УДК 550.3:621.385.632

ДВУХМЕРНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ С ПОТЕРЯМИ

¹Федоров В.Н., ²Федорова Л.Л., ²Соколов К.О.

¹ФГОУ «Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова»,
Якутск, e-mail: fvnsyfu@mail.ru;

²Институт горного дела Севера им. Н.В. Черского СО РАН, Якутск, e-mail: lar-fed-90@rambler.ru

Для совершенствования георадиолокационной аппаратуры, методик измерения и интерпретации их результатов актуальна разработка новых методов решения задач электродинамического моделирования. Наиболее популярные методы вычислительной электродинамики, такие как FDTD, TLM и др., требуют больших вычислительных ресурсов и не позволяют одновременно учитывать поляризацию электромагнитных волн, диссипативные и поляризационные потери в широком диапазоне частот. Отсутствие возможности получения подобной информации по результатам математического моделирования сказывается на качестве и достоверности результатов интерпретации данных георадиолокационных исследований. В работе описан оригинальный метод дифференциальных ABCD-матриц для представления двухмерной слоистой среды, в которой распространяются квази-Т-волны. Введение фиктивных диэлектрической и магнитной проницаемостей позволяет учесть поляризацию электромагнитных волн. Для учета поляризационных и диссипативных потерь в широком диапазоне частот введены два вида проводимостей – на низких и высоких частотах. Представлены эквивалентные электрические схемы малого участка среды и схема замещения для учета диссипативных и поляризационных потерь. Получен критерий устойчивости дифференциальных матриц, аналогичный критерию Куранта – Фредерикса – Леви. Записаны граничные условия на границах среды, которые позволяют рассчитать электромагнитное поле, как на границах, так и в самой среде при зондировании ее радиоимпульсом георадара. Полученная в результате проведенного исследования двумерная электродинамическая модель позволяет провести расчеты распространения квази-Т-волны в неоднородной среде и детально исследовать особенности электромагнитных волновых процессов, происходящих в подповерхностных слоях геологических сред, без ограничений на характер и количество включений и неоднородностей.

Ключевые слова: ABCD-матрица, матрица передачи, квази-Т-волны, уравнения Максвелла, двухмерная среда, диссипативные потери, поляризационные потери, поляризация электромагнитных волн

TWO-DIMENSIONAL ELECTRODYNAMIC MODEL OF AN INHOMOGENEOUS MEDIUM WITH LOSSES

¹Fedorov V.N., ²Fedorova L.L., ²Sokolov K.O.

¹North-Eastern federal university of M.K. Ammosov, Yakutsk, e-mail: fvnsyfu@mail.ru;

²Mining Institute of the North SB RAS, Yakutsk, Republic of Sakha, Yakutsk, e-mail: lar-fed-90@rambler.ru

In the propagation of ultra-wideband pulses of georadars in the ground, their characteristics are affected by the electrophysical properties of rocks and the methods used to calculate the reflected signals of conventional radars cannot be used here. Therefore, it is necessary to develop methods for solving inverse problems of electrodynamics, which is necessary to improve the equipment of georadar, measurement techniques and their interpretation. The most popular methods of Computational Electrodynamics such as FDTD, TLM, etc. do not allow to take into account simultaneously the polarization of electromagnetic waves, dissipative and polarization losses in a wide frequency range. In addition, they require large machine resources. The lack of the possibility of obtaining such information from the results of mathematical modeling affects the quality and reliability of the results of the interpretation of GPR data. The paper describes the original method of differential ABCD-matrices for two-dimensional layered medium in which quasi-T-waves propagate. The insertion of fictitious dielectric and magnetic permittivity allows in to take into account the polarization of electromagnetic waves. To account for polarization and dissipative losses in a wide frequency range, two types of conductivities are introduced – at low and high frequencies. The equivalent electric circuits of a small part of the medium and the equivalent circuit for the account of dissipative and polarization losses are presented. The stability criterion of differential matrices analogous to the Courant-Fredricks-levy criterion is obtained. The boundary conditions at the boundaries of the medium are recorded, which allow to calculate the electromagnetic field both at the boundaries and in the medium itself under irradiation by its radio pulse of the georadar. The two-dimensional electrodynamic model obtained as a result of the investigation allows calculations of the propagation of a quasi-T wave in an inhomogeneous medium. It also makes it possible to investigate in detail the features of electromagnetic wave processes occurring in the subsurface layers of geological media, without restrictions on the nature and number of inclusions and inhomogeneities.

Keywords: ABCD-matrix, transmission matrix, quasi-T-waves, Maxwell's equations, two-dimensional medium, dissipative losses, polarization losses, polarization of electromagnetic waves

В последнее десятилетие метод георадиолокации стали активно применять для решения самых разных инженерно-геологических, геотехнических задач. Метод георадиолокации основан на явлении отражения

электромагнитной волны от границ неоднородностей в изучаемой среде, на которых скачкообразно изменяются электрические свойства – электропроводность и диэлектрическая проницаемость. При распростра-

нении георадарных сверхширокополосных импульсов в грунте на их амплитуду, фазовые характеристики и спектр частот влияют электрофизические свойства пород – электропроводность, диэлектрическая и магнитная проницаемости в широком диапазоне частот. Они в свою очередь зависят от таких параметров грунта, как влажность и плотность горных пород, форма, размеры, взаимное расположение и ориентация минеральных зёрен или частиц и т.п.

Для совершенствования георадиолокационной аппаратуры, методик измерения и интерпретации их результатов актуальна разработка новых методов решения задач электродинамического моделирования, учитывающих изменение поляризации электромагнитной волны после отражения от границы неоднородности изучаемой среды. Наиболее широкое распространение для электродинамического моделирования получили такие методы, как FDTD, TLM и другие [1, 2]. Их основной недостаток – невозможность учета потерь в широком диапазоне частот, использование рекурсивных методов расчета и поэтому потребность в больших машинных ресурсах памяти и быстродействию.

С целью разработки более эффективно метода расчёта было предложено использовать дифференциальные ABCD-матрицы передачи [3], которые описывают малые участки оптической среды через матрицы передачи. Данный подход успешно реализован для расчета оптических систем в работе [4]. В работах [5–7] малые участки двумерной слоистой среды с потерями были представлены в виде их матриц передачи. Это позволило записать ABCD-матрицы

слоев, а их перемножение – матрица передачи всей среды и рассчитать электромагнитное поле на границе среды при облучении ее радиоимпульсом георадара.

В данной работе для учета поляризации электромагнитной волны (ЭМВ) предлагается уточненная модель среды, путем введения фиктивных диэлектрической и магнитной проницаемостей. Это позволяет в ABCD-матрице малых элементов среды учесть поляризацию ЭМВ. Для учета поляризационных и диссипативных потерь в широком диапазоне частот предлагается ввести два вида проводимостей – на низких и высоких частотах. Получен критерий устойчивости дифференциальных матриц, аналогичный критерию Куранта – Фредерикса – Леви.

Двухмерная электродинамическая модель среды

Под элементом пространства будем понимать часть среды, линейные размеры которой малы или стремятся к 0. Электродинамическое моделирование методом ABCD-матриц основано на представлении элементов среды матрицами передачи в виде отрезков электрических цепей с распределенными параметрами. Для этого вводятся комплексные проводимость \dot{y} и сопротивление \dot{z} среды:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= j\omega\epsilon_0\epsilon_a + \sigma; \\ \dot{z} &= j\omega\mu_0\mu_a, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\omega = 2\pi \cdot f$ – круговая частота; $\epsilon_0, \mu_0, \epsilon_a, \mu_a$ – абсолютные и относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости; σ – проводимость среды, позволяющая учесть тепловые и диссипативные потери.

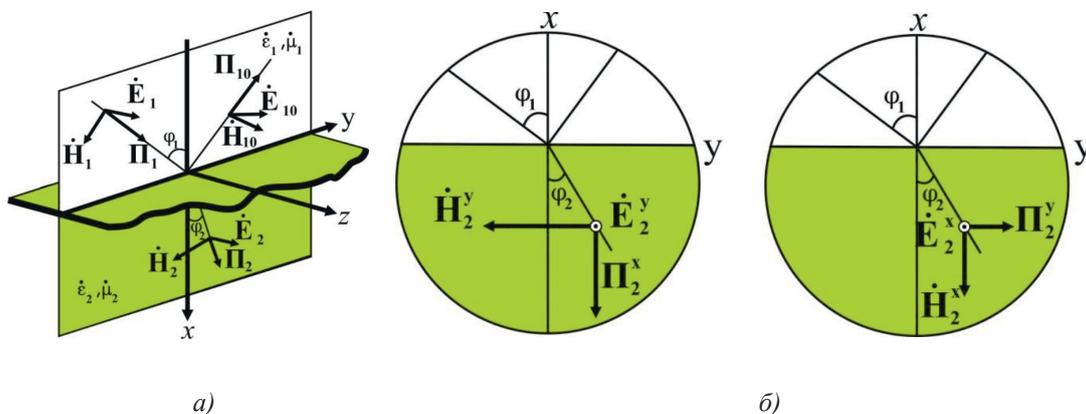


Рис. 1. а) Падающая Π_p , отраженная Π_{10} и прошедшая Π_2 электромагнитные волны; б) две ортогональных связанных Т-волны Π_2^x и Π_2^y , образующие прошедшую волну

В этом случае уравнения Максвелла записываются [8]:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \dot{y} \vec{E}; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\dot{z} \vec{H}. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть плоскость YZ – граница, разделяющая среду 1 и среду 2, вектор Пойтинга Π_1 падающей ЭМВ лежит в плоскости XY , а вектор \vec{E}_1 ей перпендикулярен так, как это показано на рис. 1, а (случай горизонтальной поляризации). В среде 1 будут распространяться две волны: падающая Π_1 и отраженная Π_{10} . В среде 2 распространяется только прошедшая волна Π_2 . Тогда $\dot{E}_1^x = \dot{E}_1^y = 0$, $\dot{H}_1^z = 0$ и из (2) следует, что прошедшая ЭМВ будет описываться следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{E}_2}{\partial y} &= -\dot{z}_2 \dot{H}_2^x, \\ \frac{\partial \dot{E}_2}{\partial x} &= \dot{z}_2 \dot{H}_2^y, \\ \frac{\partial \dot{H}_2^y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_2^x}{\partial y} &= \dot{y}_2 \dot{E}_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Прошедшую ЭМВ Π_2 можно представить как две ортогональные связанные T -волны Π_2^x и Π_2^y , где $\dot{E}_2 = \dot{E}_2^x + \dot{E}_2^y$ (рис. 1, б).

Тогда третье уравнение в (3) можно разделить на два уравнения, если ввести фиктивные диэлектрические проницаемость $\dot{\epsilon}_m$ и проводимость $\dot{y}_m = j\omega \epsilon_0 \dot{\epsilon}_m$, которые связывают \dot{E}_2^x и \dot{E}_2^y и переписать (3) как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{E}_2^y}{\partial y} &= -\dot{z}_2 \dot{H}_2^x, \\ \frac{\partial \dot{E}_2^x}{\partial x} &= \dot{z}_2 \dot{H}_2^y, \\ \frac{\partial \dot{H}_2^y}{\partial x} &= \frac{1}{2}[(\dot{y}_2 + \dot{y}_m) \dot{E}_2^x - \dot{y}_m \dot{E}_2^y], \\ \frac{\partial \dot{H}_2^x}{\partial y} &= \frac{1}{2}[\dot{y}_m \dot{E}_2^x - (\dot{y}_2 - \dot{y}_m) \dot{E}_2^y]. \end{aligned} \quad (4)$$

$$[ABCD] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & (\dot{z}_2 + \dot{z}_m) \cdot \Delta x & -\dot{z}_m \Delta x \\ 0 & 1 & \dot{z}_m \Delta y & (\dot{z}_2 - \dot{z}_m) \Delta y \\ (\dot{y}_2 + \dot{y}_m) \cdot \Delta x & -\dot{y}_m \Delta x & 1 & 0 \\ \dot{y}_m \Delta y & (\dot{y}_2 - \dot{y}_m) \Delta y & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

Учет поляризационных и диссипативных потерь в среде

Внешнее электрическое поле вызывает в ионно-проводящих горных породах (песках, песчаниках, известняках и др.) различного вида поляризационные процессы. Для их учета необходимо знать время релаксации $\tau_{\text{рел}}$, которое для большинства пород неизвестно. Но для многих пород известна зависимость проводимости σ и комплексной диэлектрической $\dot{\epsilon}$ от частоты [9–10]. Чтобы учесть в породах поляризационные и диссипативные потери введем два вида проводимостей – $\sigma_{\text{ст}}$, σ_{∞} и два вида диэлектрических проницаемостей $\epsilon_{\text{ст}}$, ϵ_{∞} на низких и высоких частотах соответственно. Этому соответствует эквивалентная схема замещения рис. 2.

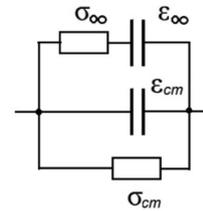


Рис. 2. Эквивалентная схема замещения диссипативных и поляризационных потерь, $\epsilon_{\text{ст}}$, ϵ_{∞} , $\sigma_{\text{ст}}$, σ_{∞} – диэлектрические проницаемости и проводимости среды на низких и высоких частотах соответственно

Тогда комплексную проводимость горной породы \dot{y} в (2) можно записать как

$$\dot{y} = j\omega \epsilon_0 \left(\epsilon_{\infty} + \frac{\epsilon_{\text{ст}} - \epsilon_{\infty}}{1 + j\omega \sigma_{\infty}^{-1} \epsilon_0 (\epsilon_{\text{ст}} - \epsilon_{\infty})} + \frac{\sigma_{\text{ст}}}{j\omega \epsilon_0} \right), \quad (5)$$

где $\sigma_{\infty}^{-1} \epsilon_0 (\epsilon_{\text{ст}} - \epsilon_{\infty}) = \tau_{\text{рел}}$ – время релаксации.

Дифференциальная матрица передачи элемента среды

Рассмотрим случай вертикальной поляризации, когда вектор E лежит в плоскости XY . Рассуждая аналогично вышесказанному, введя фиктивные магнитные проницаемость $\dot{\mu}_m$ и сопротивление $\dot{z}_m = j\omega \mu_0 \dot{\mu}_m$, переходя аналогично (4) к конечным разностям: $\partial x \rightarrow \Delta x$ и $\partial y \rightarrow \Delta y$ записываем обобщенную дифференциальную матрицу передачи двухмерного элемента среды (ABCD-матрицу):

$$\begin{bmatrix} \dot{E}_2^x(x+\Delta x) \\ \dot{E}_2^y(y+\Delta y) \\ \dot{H}_2^y(x+\Delta x) \\ \dot{H}_2^x(y+\Delta y) \end{bmatrix} = [ABCD] \cdot \begin{bmatrix} \dot{E}_2^x(x) \\ \dot{E}_2^y(y) \\ \dot{H}_2^y(x) \\ \dot{H}_2^x(y) \end{bmatrix} \quad (7)$$

ABCD-матрице (6) можно поставить в соответствие эквивалентную схему элемента среды как восьмиполусник (рис. 3).

Расчет электрических полей

Дифференциальные ABCD-матрицы элементов среды позволяют записать ABCD-матрицы слоев, а их перемножение – матрицу передачи всего участка сре-

ды. Задавая соответствующие граничные условия, можно рассчитать распределение электрических полей в этой среде.

Модель элементов среды позволяет описать двумерную среду, в общем случае состоящую из ячеек с разными электрофизическими свойствами. На рис. 4 показана такая модель, в которой двумерная среда представлена матрицей (M×N) элементов и состоящая из вектора внутренних сопротивлений источников (Z₁), вектора источников ЭМВ (E_s), каскадного соединения восьмиполусников элементов среды (a_s, где a_{s1}, a_{s2}... a_{sN} – ABCD-матрицы слоев среды) и вектора волновых сопротивлений N + 1 среды (Z₂).

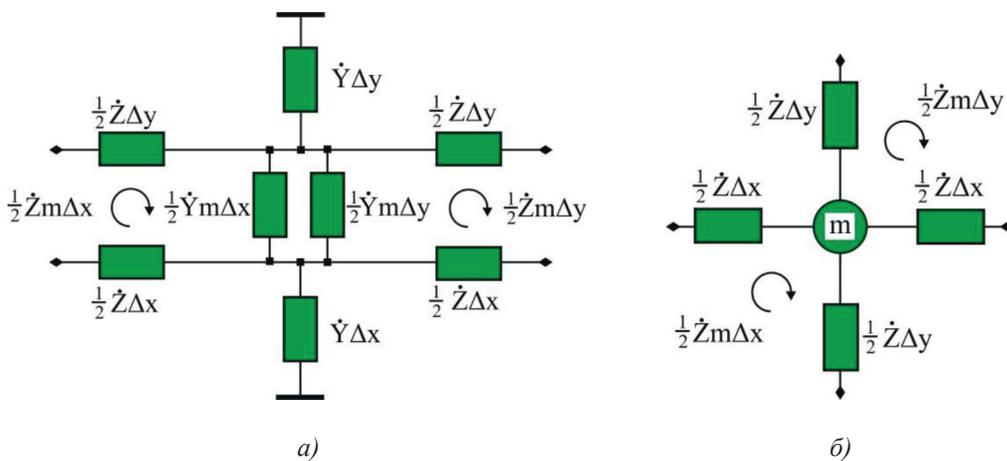


Рис. 3. Эквивалентная схема элемента среды: а) в виде восьмиполусника; б) упрощенный вариант а)

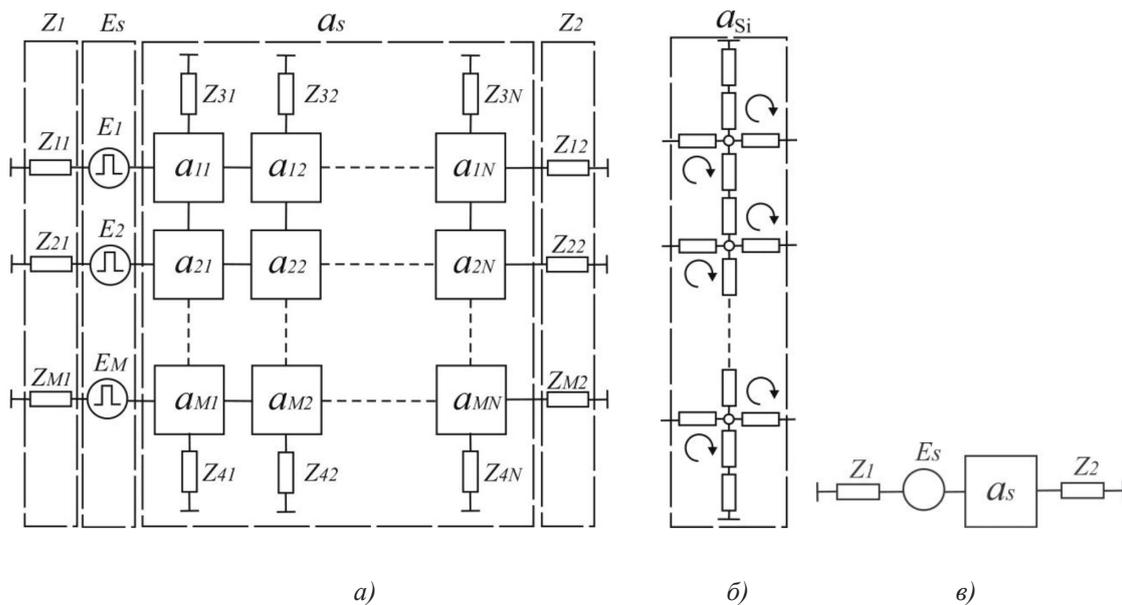


Рис. 4. Эквивалентные схемы: а) двумерной неоднородной среды; б) результирующего многополусника i-го слоя a_{si}; в) результирующего многополусника участка среды a_s

Объединяя элементы послойно, перемножая матрицы слоев, получаем результирующую ABCD-матрицу среды a_s :

$$a_s = \prod_{i=1}^N a_{s_i}, \quad (8)$$

в которой условия распространения Т-волн определяются граничными условиями среды слева и справа:

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &= \dot{E}_s - \dot{Z}_1 \dot{H}_1, \\ \dot{E}_{N+1} &= \dot{Z}_2 \dot{H}_{N+1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда амплитуда магнитного поля справа:

$$\dot{H}_{N+1} = \frac{\dot{E}_s}{a_{11} \dot{Z}_{N+1} + a_{12} + a_{21} \dot{Z}_1 \dot{Z}_{N+1} + a_{22} \dot{Z}_1}, \quad (10)$$

где a_{ij} – элементы результирующей матрицы a_s . Остальные амплитуды электрического и магнитного полей справа и слева находим из (9).

Устойчивость дифференциальных матриц передачи

Численное решение дифференциальных уравнений в частных производных сходится, при выполнении условия устойчивости

$$v \frac{\Delta t}{\Delta x} < C, \quad (11)$$

где v – максимальная скорость переноса возмущения в среде, Δx – шаг по координате, Δt – шаг по времени, C – константа, которая в общем случае зависит от уравнения, но не зависит от Δx и Δt . Критерий назван в честь Рихарда Куранта, Курта Фридрикса и Ганса Леви (КФЛ). Физический критерий КФЛ означает, что возмущение за один шаг Δt по времени не должно продвинуться больше, чем на один пространственный шаг Δx .

Рассмотрим для простоты одномерную электродинамическую модель среды. Для нее дифференциальная матрица передачи элемента среды запишется как

$$[ABCD] = \begin{bmatrix} 1 & -\dot{Z}_2 \cdot \Delta x \\ -\dot{Y}_2 \cdot \Delta x & 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Очевидно, что если модуль дискриминанта дифференциальной матрицы (12)

$$\det = 1 - \dot{Z}_2 \dot{Y}_2 \Delta x^2 = 1 + \omega^2 \dot{\epsilon}_2 \dot{\mu}_2 \Delta x^2 \quad (13)$$

будет больше 1, то значения членов результирующей матрицы a_s в результате умножения будут стремиться к бесконечности. Это будет значить, что решение потеряло устойчивость.

Введем параметр δ^2 , характеризующий отклонение \det от 1 как

$$1 + |\omega^2 \dot{\epsilon}_2 \dot{\mu}_2 \Delta x^2| = 1 + \delta^2. \quad (14)$$

Тогда можно записать условие сходимости процесса для заданного диапазона частот и δ при известном Δx :

$$|\omega^2 \dot{\epsilon}_2 \dot{\mu}_2 \Delta x^2| \leq \delta^2, \quad (15)$$

откуда условие устойчивости:

$$\omega_{\max} \frac{\Delta x}{v_c} \leq \delta, \quad (16)$$

где $v_c = 1 / \text{Im}(\dot{\epsilon}_2 \dot{\mu}_2)$ – скорость распространения ЭМВ в среде, ω_{\max} – максимальная круговая частота сигнала.

Например, если $\delta = 10^{-6}$, $f_{\max} = 10^9$ Гц, $v_c = 3 \cdot 10^8$ м/с, то пространственный шаг не должен превышать $\Delta x \leq 0,477 \cdot 10^{-7}$ м.

Заключение

В работе описан оригинальный метод электродинамического моделирования с помощью дифференциальных ABCD-матриц, которые описывают малые участки двухмерной слоистой среды. Введение фиктивных диэлектрической и магнитной проницаемостей позволило в ABCD-матрице малых элементов среды учесть поляризацию ЭМВ. Для учета поляризационных и диссипативных потерь в широком диапазоне частот введены два вида проводимостей – на низких и высоких частотах. Получен критерий устойчивости дифференциальных матриц, аналогичный критерию Куранта – Фредерикса – Леви. Записаны граничные условия на границах среды, которые позволяют рассчитать электромагнитное поле, как на границах, так и в самой среде при облучении ее радиоимпульсом георадара.

Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований СО РАН (проект № 0382-2016-0001) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-45-140061 p_a).

Список литературы / References

1. Yee K.S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. IEEE Trans. Antennas Prop. 1966. vol. AP-14. P. 302–307.
2. Johns P.B., Beurle R.L. Numerical solution of 2-dimensional scattering problems using a transmission-line matrix. Proc. IEE. 1971. vol. 118. no. 9. P. 1203–1208.
3. Григорьев А.Д. Методы вычислительной электродинамики. М.: Физматлит. 2013. 432 с.
4. Grigoriev A.D. Methods of computing electrodynamics. M.: Fizmatlit. 2013. 432 p. (in Russian).

4. Kogelnik H. On the propagation of Gaussian beams of light through lenslike media including those with a losses or gain variation. *Appl. Opt.* 1965. № 4. P. 1562–1569.
5. Федоров В.Н., Федорова Л.Л., Прудецкий Н.Д. Лучевой метод квази-Т-волн при георадиолокационных исследованиях // СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии: материалы 27-ой Международной Крымской конференции (Севастополь, 10–16 сент. 2017 г.). Севастополь, 2017. С. 1562–1568.
- Fedorov V.N., Fedorova L.L., Prudetsky N.D. A beam method of quasi-T-waves at georadar researches // The Microwave technique and telecommunication technologies: materials of the 27th International Crimean conference (Sevastopol, 10–16 Saint. 2017). Sevastopol, 2017. P. 1562–1568 (in Russian).
6. Федоров В.Н., Федорова Л.Л., Малютин Н.Д. Электродинамическое моделирование неоднородных сред методом дифференциальных ABCD матриц: материалы VIII Международной конференции по математическому моделированию (Якутск, 4–8 июля 2017 г.). Якутск, 2017. С. 162.
- Fedorov V.N., Fedorova L.L., Malyutin N.D. Electrodynamic modeling of non-uniform environments by method of differential ABCD of matrixes: materials VIII of the international conference on mathematical modeling (Yakutsk, on July 4–8, 2017). Yakutsk, 2017. P. 162 (in Russian).
7. Федоров В.Н., Федорова Л.Л. Электродинамическое моделирование структурных особенностей массива горных пород россыпных месторождений при георадиолокации // Известия высших учебных заведений. Физика. 2015. Т. 58. № 8–2. С. 48–50.
- Fedorov V.N., Fedorova L.L. Electro-dynamic simulation of structural features of rock mass of placer deposits using gpr-method // *Izvestiya vysshix uchebny`x zavedenij. Fizika.* 2015. T. 58. № 8–2. P. 48–50 (in Russian).
8. Фальковский О.И. Техническая электродинамика. СПб.: Лань, 2009. 432 с.
- Falkovsky O.I. Technical electrodynamics. SPb.: Lan`, 2009. 432 p. (in Russian).
9. Корсаков А.К. Структурная геология. М.: РГГРУ, 2009. 325 с.
- Korsakov A.K. Structural geology. M.: RGGRU, 2009. 325 p. (in Russian).
10. Treatise on Geophysics. edition. G. Schubert. Second Edition. Kidlington: Elsevier, 2015. 5604 p.