УДК 004.942

НЕЧЕТКИЕ ПОДСТАНОВКИ И ПРИНЦИП МАМДАНИ

Бурмистрова О.Н., Кобрунов А.И., Кожевникова П.В.

ФБГОУ ВПО «Ухтинский государственный технический университет», Ухта, e-mail: otimohova@ugtu.net

Описаны основные элементы аппарата представления нечетких данных и нечетких зависимостей с оценкой их меры достоверности. Более подробно рассмотрен этап композиции нечетких отношений, реализованный посредством традиционной процедуры max – min нечеткой свертки нечетких отношений (композиции Мамдани). Доказано, что композиция Мамдани имеет смысл, аналогичный подстановке уравнений для исключения общих повторяющихся переменных. Приведен результат расчета композиции Мамдани, который показывает, что рассматриваемая композиция действительно выполняет роль подстановок уравнений и исключения промежуточных переменных. Результаты применимы к решению задачи установления нечетких отношений между стартовыми и прогнозными параметрами по цепочке отношений, содержащих промежуточные параметры, что особо важно для установления отношений между величинами, характеризующими петрофизические и геофизические свойства горных пород.

Ключевые слова: задача, параметры, уравнения, методы, математическое моделирование

FUZZY SUBSTITUTION AND THE PRINCIPLE OF MAMDANI

Burmistrova O.N., Kobrunov A.I., Kozhevnikova P.V.

Ukhta State Technical University, Ukhta, e-mail: otimohova@ugtu.net

The main elements of the apparatus of representation for fuzzy data and fuzzy dependency with their reliability measures. In more detail the stages of the composition of fuzzy relations, implemented by means of conventional procedures max – min fuzzy convolution fuzzy relations (composition Mamdani). It is proved that the composition Mamdani has a similar sense of substituting the equations to eliminate common recurring variables. The results of calculations of the composition Mamdani, which shows that indeed, the composition serves as a permutation equations and exclusion of intermediate variables. The results are applicable to the task of establishing fuzzy relationship between the starting and forecast parameters of the chain of relations containing intermediate settings, which is especially important to establish a relationship between the quantities characterizing the geophysical and petrophysical properties of rocks.

Keywords: the task, parameters, equations, methods, mathematical modeling

Нечеткие переменные естественным образом возникают как исходные данные, для установления зависимостей между физико-геологическими параметрами, используемыми для прогноза одних физико-геологических параметров по другим [2, 3]. В отличие от традиционных методов вывода регрессионных уравнений по набору входных данных [1], и дальнейшего оперирования этими уравнениями как основой для прогноза параметров, концепция использования нечетких переменных основывается на полноценном учете всей совокупности данных, включая те неопределенности, которые реально существуют.

Основные концептуальные положения, лежащие в основе методов нечеткого моделирования, применительно к задачам моделирования в промысловой геологии состоят в следующем [4, 5]:

– влияние неоднородностей, присущих распределенным параметрам физико-геологической модели среды, проявляющимся в форме погрешностей измерений, приводит к нечеткости входных данных, используемых при моделировании, которые характеризуются распределением своих значений в выделенном диапазоне и ранжированным по уровню доверия результатам;

– те же факторы приводят к недоопределенности данных, используемых при построении зависимостей, с целью обучения прогнозу параметров по измеренным данным. Зависимости должны отражать объективную неопределенность связей между параметрами и быть ранжированными по достоверности во всем диапазоне своей области определения и допустимых значений;

– итоговая физико-геологическая модель, определенная как система распределенных геолого-геофизических параметров, должна наследовать ранжированную по достоверности неопределенность исходных данных в форме многовариантности и дифференцированной по компонентам вариантов оцененной достоверности.

Адекватным аппаратом, представления нечетких данных и нечетких зависимостей с оценкой их меры достоверности служат принципы нечеткого моделирования, основанного на трех компонентах:

– неопределенные данные с оценкой меры доверия представляются в форме функций принадлежности для нечетких величин;

– неопределенные связи с их дифференцированным ранжированием по достоверности представляются в форме отношений между нечеткими величинами;

– прогноз параметров модели с ранжированной оценкой достоверности реализуется построением функции принадлежности для пространственного распределения параметров физико-геологической модели и выполняется на принципах нечеткого логического вывода, основанного на функции принадлежности для измеренных нечетких величин и нечеткого отношения, между измеряемым и прогнозным параметрами полученными на этапе петрофизических исследований керна.

В приведенной концепции основными элементами служат:

Фазификация исходных данных – представление их в форме функций принадлежности $\mu(x, R_i)$ для исходных величин параметра x в локальных интервалах R_i, в которых будет выполняться прогнозирование.

Фазификация отношений, состоящая в построении функций принадлежности для отношений между исходными x, промежуточными y, h, …, ξ и прогнозными параметрами z: $\mu(x, y)$, $\mu(y, h)$, $\mu(\xi, z)$.

Расчёт композиций нечётких отношений между входными параметрами для прогноза и итоговыми через систему промежуточных параметров y, h, …, ξ для установления отношений $\mu(x, z)$ между начальными и конечными параметрами.

Для расчета функции принадлежности для параметра y по заданным на основе фазификации данных $\mathfrak{M}$, функции принадлежности исходного параметра – $\mu_{\mathfrak{M}}(x)$, и установленной на основе фазификации данных $\mathfrak{A}$, функции принадлежности для отношения между x и y – $\mu_{\mathfrak{A}}(x, y)$, используем традиционную максиминную нечёткую свёртку (композицию):

$$\mu_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{M}}(y) = \max_x \left\{ \min\left[\mu_{\mathfrak{M}}(x), \mu_{\mathfrak{A}}(x,y) \right] \right\} = \\ = \bigcup_x \left(\mu_{\mathfrak{M}}(x) \cap \mu_{\mathfrak{A}}(x,y) \right). \quad (1)$$

Эта формула соответствует обычному правилу матричной алгебры – произведение матрицы эквивалентной $\mu_{\mathfrak{A}}(x, y)$ на вектор $\mu_{\mathfrak{M}}(x)$, но сформулированному на языке логических умножений – пересечений и сумм – объединений.

Далее, по найденной $\mu_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{M}}(y)$ и заданному отношению $\mu_{\mathfrak{R}}(y, z)$ находим:

$$\mu_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{M}\times\mathfrak{R}}(z) = \max_y \left\{ \min\left[\mu_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{M}}(y), \mu_{\mathfrak{R}}(y,z) \right] \right\} = \\ = \bigcup_y \left(\mu_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{M}}(y) \cap \mu_{\mathfrak{R}}(y,z) \right). \quad (2)$$

Подставляя выражение для $\mu_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{M}}(y)$ в последнее соотношение, получаем

$$\mu_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{M}\times\mathfrak{R}}(z) = \bigcup_y \left(\bigcup_x \left(\mu_{\mathfrak{M}}(x) \cap \mu_{\mathfrak{A}}(x,y) \right) \cap \mu_{\mathfrak{R}}(y,z) \right) = \\ = \bigcup_x \left(\bigcup_y \left(\left(\mu_{\mathfrak{M}}(x) \cap \mu_{\mathfrak{A}}(x,y) \right) \cap \mu_{\mathfrak{R}}(y,z) \right) \right) = \\ = \bigcup_x \left\{ \left[\bigcup_y \left(\mu_{\mathfrak{A}}(x,y) \cap \mu_{\mathfrak{R}}(y,z) \right) \right] \cap \mu_{\mathfrak{M}}(x) \right\}. \quad (3)$$

Обозначив

$$\mu_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{R}}(x,z) = \left[\bigcup_y \left(\mu_{\mathfrak{A}}(x,y) \cap \mu_{\mathfrak{R}}(y,z) \right) \right], \quad (4)$$

получаем для $\mu_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{M}\times\mathfrak{R}}(z)$.

Соотношение (4) переписывается содержательным раскрытием операций пересечения и объединения в эквивалентной форме следующим образом:

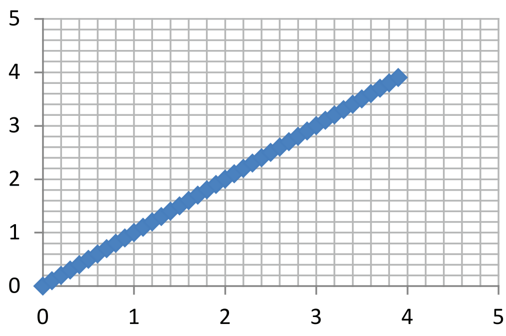
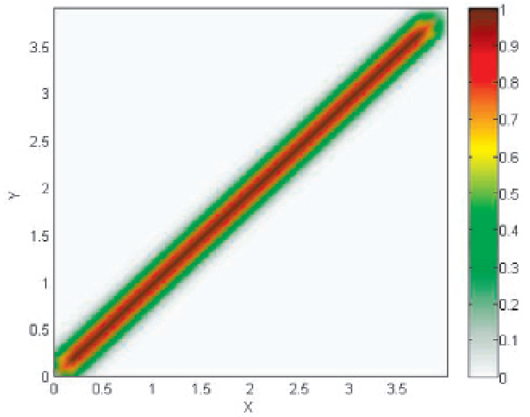
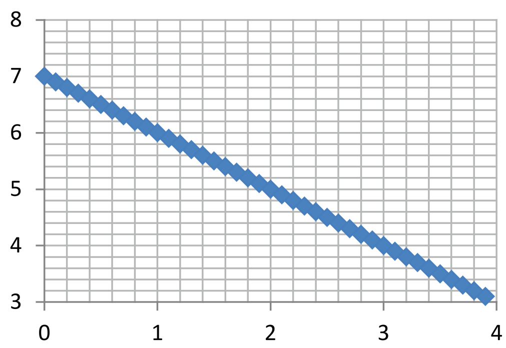
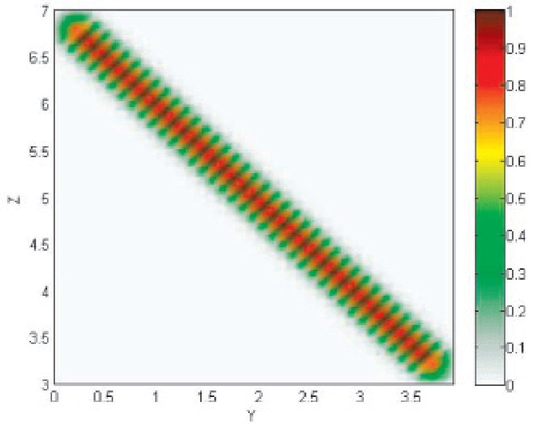
$$\mu_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{R}}(x,z) = \max_y \left[\min\left(\mu_{\mathfrak{A}}(x,y), \mu_{\mathfrak{R}}(y,z) \right) \right]. \quad (5)$$

Это искомое соотношение для подстановок в представлениях функций принадлежности для нечетких величин. Соотношение (5) известно как композиция Мамдани $\mu_{\mathfrak{A}}(x, y)$ и $\mu_{\mathfrak{R}}(y, z)$ и, как выяснено, имеет смысл, аналогичный подстановке уравнений для исключения общих повторяющихся переменных. Этим обосновываются правила вычисления цепочек композиций промежуточных отношений для получения функции принадлежности итогового отношения $\mu_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{R}}(x, z)$ между исходными и итоговыми прогнозными параметрами. Это исключительно важное и определяющее обстоятельство для формирования правил нечеткой математики, обеспечивающих анализ неопределенных нечетких данных, полученных в результате экспериментов. Оно обосновывает применимость композиции Мамдани отношений как подстановки нечетких зависимостей для нахождения итоговых законов, обеспечивающих прогноз нечетких параметров.

Продемонстрируем эквивалентность этого правила обычным приемом подстановок уравнений в некоторых простейших случаях.

Далее на рисунках приведены исходные данные и их нечеткие модели для отношений $\mu_{\mathfrak{A}}(x, y)$ и $\mu_{\mathfrak{R}}(y, z)$.

Для линейных зависимостей:

Исходные данные: $y = x$	Нечеткая модель $\mu_{\mathfrak{A}}(x, y)$
	
Исходные данные: $z = 7 - y$	Нечеткая модель $\mu_{\mathfrak{R}}(y, z)$
	

Композиция Мамдани $\mu_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{R}}(x, z)$ этих отношений выглядит следующим образом:

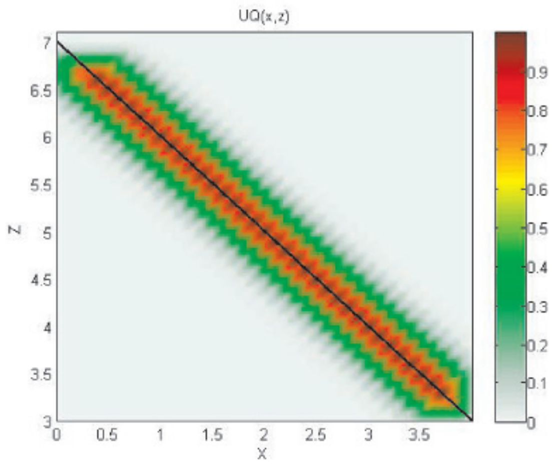
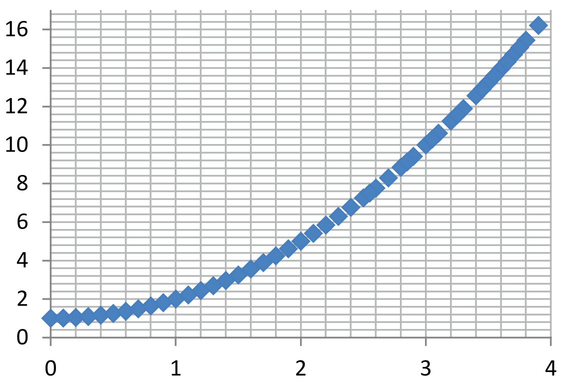
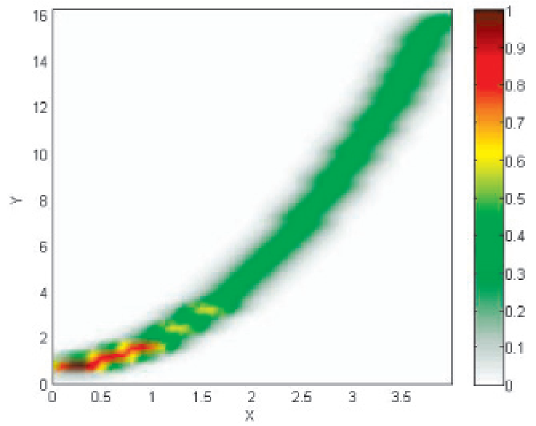
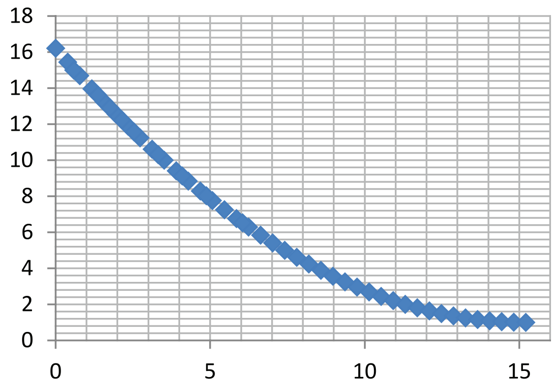
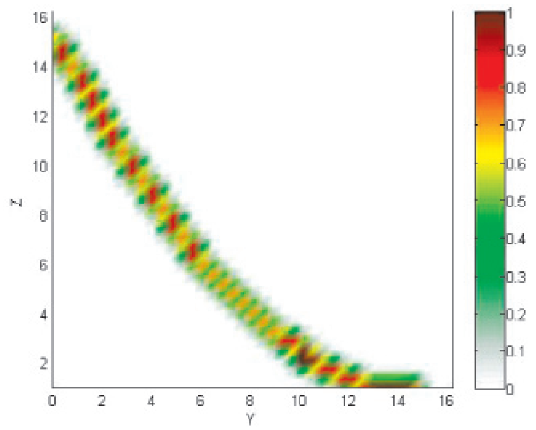


Рис. 1. Композиция Мамдани линейных зависимостей: черным цветом обозначен график функций, полученный путем подстановки уравнений

Как видно, в полном соответствии с «алгебраической аналогией» происходит подстановка уравнений и исключение промежуточного параметра y.

Для нелинейных зависимостей:

Исходные данные: $y = x^2 + 1$	Нечеткая модель $\mu_{\mathfrak{A}}(x, y)$
	
Исходные данные: $z = \dfrac{(y-15)^2}{15} + 1$	Нечеткая модель $\mu_{\mathfrak{R}}(y, z)$
	

Композиция Мамдани $\mu_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{R}}(x, z)$:

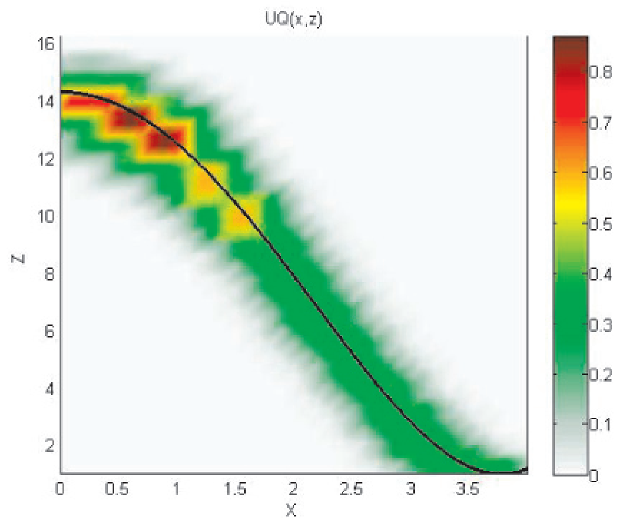
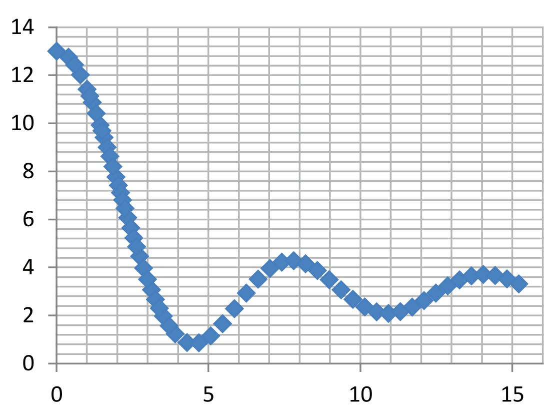
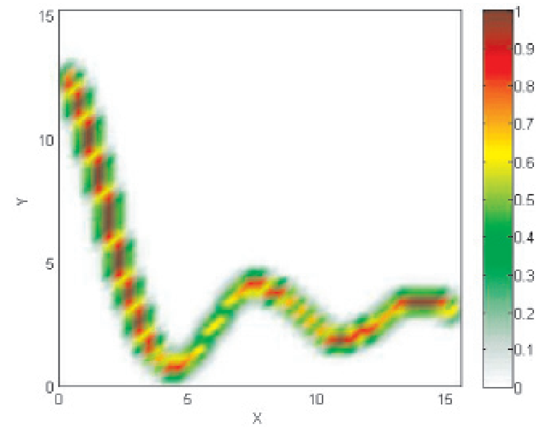
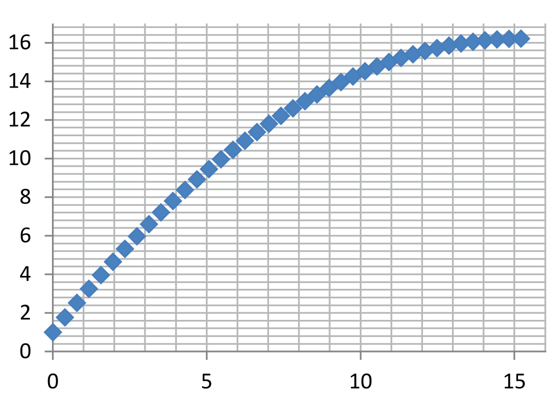
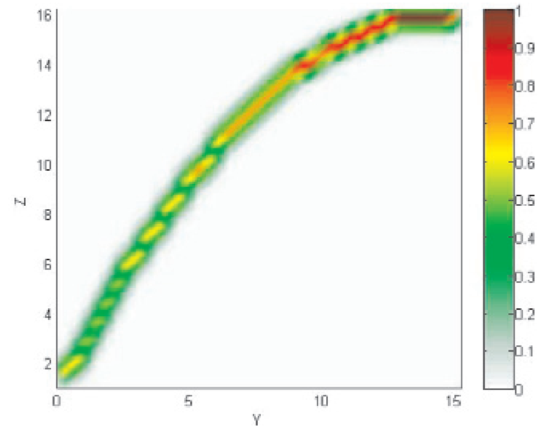


Рис. 2. Композиция Мамдани нелинейных зависимостей

Для более выраженных нелинейностей:

Исходные данные: $y = 3 + \dfrac{10 \cdot \sin(x)}{x}$	Нечеткая модель $\mu_{\mathfrak{A}}(x, y)$
	
Исходные данные: $z = 16 - \dfrac{(y-15)^2}{15}$	Нечеткая модель $\mu_{\mathfrak{R}}(y, z)$
	

Композиция Мамдани $\mu_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{R}}(x, z)$:

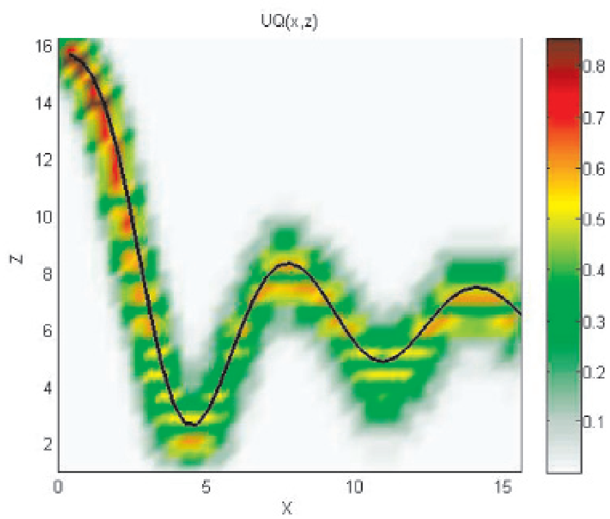


Рис. 3. Композиция Мамдани более выраженных нелинейных зависимостей

Приведенные результаты позволяют использовать композицию Мамдани в моделях нечеткого анализа как нечеткий аналог подстановок зависимостей, что особо важно для установления отношений между величинами, характеризующими петрофизические и геофизические свойства горных пород.

Список литературы

1. Вендельштейн Б.Ю., Резванов Р.А. Геофизические методы определения параметров нефтегазовых коллекторов: при подсчете запасов и проектировании разработки месторождений. – М.: Недра, 1978. – 318 с.

2. Кобрунов А.И. Прямые и обратные задачи рассеяния при прогнозе физико-геологических параметров по геофизическим данным // Фундаментальные исследования – 2014. – № 9-6. – С. 1195–1199.

3. Кобрунов А.И. Моделирование эффектов рассеяния при прогнозе физико-геологических параметров неоднородных сред // Геофизический Журнал. – 2014. – № 5, т. 36 204. – С. 81–90.

4. Кобрунов А.И., Григорьевых А.В. Методы нечеткого моделирования при изучении взаимосвязей между геофизическими параметрами // Геофизика.– 2010.– № 2.– С. 17–23.

5. Кобрунов А.И. Математические методы моделирования в прикладной геофизике. (Избранные главы): учебное пособие. Часть. 2 Системный анализ и моделирование в условиях неопределенности.– Ухта: УГТУ, 2014.– 154 с.