

УДК 621.01

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ

¹Уалиев З.Г., ¹Уалиев Г., ²Уалиева И.М.

¹Казахский Национальный педагогический университет имени Абая, Алматы,
e-mail: z.ualiyev@mail.ru

²Международный университет Информационных технологий (МУИТ), Алматы,
e-mail: i.ualiyeva@mail.ru

В статье рассматривается математическая модель механизма переменной структуры с разрывными коэффициентами. Показан пример решения дифференциального уравнения движения с конечно-разрывными коэффициентами. Эти механизмы не используются широко в практике, несмотря на очевидные улучшения возможностей по передаче движения и сил. Предложена методика определения закона движения звена приведения механизмов переменной структуры с нелинейными функциями положения.

Ключевые слова: математическая модель, механизм переменной структуры, законы движения, конечно-разрывные коэффициенты, уравнение.

THE DYNAMICAL ANALYSIS OF THE MECHANICAL SYSTEMS WITH THE VARIABLE STRUCTURE

¹Ualiyev Z.G., ¹Ualiyev G., ²Ualiyeva I.M.

¹Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, e-mail: z.ualiyev@mail.ru

²International University of Information Technology, Almaty, e-mail: i.ualiyeva@mail.ru

This paper presents the mathematical model of variable's structure mechanism with discontinuous coefficients. The example of the solution of the differential equation movement with finite-discontinuous coefficients are shown. These mechanisms are not used in the practical tasks widely, although there are certain improvements in the transmission of movement and power. The methodology of the definition of the movement law of the reduction link in variable structure mechanisms with non-linear functions of the position is offered.

Keywords: the mathematical model, the variable's structure mechanism, the movement law, finite-discontinuous coefficients, the equation.

В процессе движения механизмов переменной структуры (МПС) изменяются числа подвижных звеньев, степени свободы, виды и классы механизма. Это позволяет использовать их в качестве манипуляционных устройств для выполнения сложных технологических процессов и механизмов ударного действия. Отрицательной стороной МПС является появление дополнительных ударных нагрузок в момент изменения структуры механизма [1].

Математической моделью механизма переменной структуры является дифференциальное уравнение с разрывными коэффициентами, в частности, приведенный момент инерции является кусочно-непрерывной и положительно определенной функцией положения. В работах Джолдасбекова У.А., Уалиева Г.У., Антонюка Е.М., Абдраимова С., Ярунова М. и др. рассмотрены некоторые задачи структуры, кинематики и динамики кулачково-рычажных механизмов переменной структуры, применяемые в горнодобывающей и текстильной промышленности. В этих механизмах структура меняется за счет упругих звеньев и связей, наличием выстоя некоторых звеньев шарнир-

но-стержневых механизмов различных классов. Определение законов движения таких механизмов связано с решением дифференциальных уравнений движения с конечно-разрывными коэффициентами. В основном, в многозвенных механизмах переменной структуры правая часть уравнения – обобщенная сила – представляет непрерывную функцию положения и времени. Задача заключается в определении закона движения звена приведения механизма переменной структуры в окрестности точки разрыва инерционных параметров. Предлагаем новую методику определения закона движения звена приведения механизмов переменной структуры с нелинейными функциями положения с одной степенью свободы, движение которого описывается уравнением

$$J_n(\varphi) \ddot{\varphi}(t) + 0,5 J'_n(\varphi) \dot{\varphi}^2(t) = M_n(\varphi), \quad (1)$$

Допустим, что в положении $\varphi = \varphi_k$ механизм меняет структуру, т.е. φ_k – является координатой точки разрыва функции $J_n(\varphi)$. Производная $J'_n(\varphi)$ понимается в обобщенном смысле [2]. Поэтому, обобщенная функция, соответствующая функции $J'_n(\varphi)$, имеет вид

$$J'n(\varphi) = \Delta J \delta(\varphi - \varphi_k),$$

где ΔJ – конечный разрыв приведенного момента инерции,

$\delta(\varphi - \varphi_k)$ – функция Дирака.

Теперь уравнение (1) записывается в виде:

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{\Delta J \delta(\varphi - \varphi_k)}{2J_n(\varphi)} \dot{\varphi}^2(t) + \frac{M_n(\varphi)}{J_n(\varphi)} = 0, \quad (2)$$

В данной работе сделана попытка расширения метода переменного масштаба времени [2] для данного дифференциального уравнения второго порядка.

Введем замену

$$y(\varphi) = U(z),$$

где $z = \psi(t)$

$$\dot{\psi} = e^{-\int_0^{\varphi} \frac{\Delta J \delta(\sigma - \varphi_k)}{2J_n(\sigma)} d\sigma} y'(\varphi), \quad (2')$$

Тогда нелинейное уравнение движения преобразуется в линейное

$$U''(z) + U(z) = 0 \quad (3)$$

Допустим, что $U(z)$ и $\psi(z)$ дважды непрерывно дифференцируемые функции, тогда имеем

$$U''(z) = \frac{1}{\dot{\psi}^2} \left\{ y''(\varphi) \dot{\varphi}^2 + y'(\varphi) \left[\ddot{\varphi} - \frac{\dot{\varphi} \ddot{\psi}}{\dot{\psi}} \right] \right\}, \quad (4)$$

Подставив выражение (4) в уравнение (3), имеем

$$\ddot{\varphi} + \left[\dot{\varphi} \frac{y''(\varphi)}{y'(\varphi)} - \frac{\ddot{\psi}(t)}{\dot{\psi}(t)} \right] \dot{\varphi} + \frac{y(\varphi) \dot{\psi}^2(t)}{y'(\varphi)} = 0 \quad (5)$$

Сравнивая уравнения (5) и (2), получим

$$\frac{dy'}{y'} - \frac{d\dot{\psi}}{\dot{\psi}} = \Delta J \frac{\delta(\varphi - \varphi_k)}{J_n(\varphi)} d\varphi, \quad (6)$$

$$\frac{y(\varphi) \cdot \dot{\psi}^2(t)}{y'(\varphi)} = \frac{M_n(\varphi)}{J_n(\varphi)}, \quad (7)$$

Интегрируя выражения (6) и полагая, что постоянная интегрированная равна нулю, получим

$$y'(\varphi) = \dot{\psi} e^{\frac{\Delta J \theta(\varphi - \varphi_k)}{J_n(\varphi_k + 0)}},$$

где

$$\theta(\varphi - \varphi_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } \varphi \geq \varphi_k \\ 0 & \text{при } \varphi < \varphi_k \end{cases}$$

функция Хевисайда.

Подставив

$$\dot{\psi}(t) = y'(\varphi) e^{-\frac{\Delta J \theta(\varphi - \varphi_k)}{J_n(\varphi_k + 0)}} \quad (8)$$

в уравнение (7), имеем

$$y(\varphi) y'(\varphi) = \frac{M_n(\varphi)}{J_n(\varphi)} e^{2 \frac{\Delta J \theta(\varphi - \varphi_k)}{J_n(\varphi_k + 0)}}$$

Интегрируя уравнение (8) и предположив, что $y(0) = 0$, получим

$$y(\varphi) = \left[2 \int_0^{\varphi} \frac{M_n(\sigma)}{J_n(\sigma)} e^{2 \frac{\Delta J \theta(\sigma - \varphi_k)}{J_n(\varphi_k + 0)}} d\sigma \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

Как известно, решение уравнения (3) имеет вид

$$y(\varphi) = c_1 \cos \psi(t) + c_2 \sin \psi(t) \quad (10)$$

Покажем, что (10) удовлетворяет уравнение (2).

Действительно, из (10) получим

$$y'(\varphi) \dot{\varphi} = [-c_1 \sin \psi(t) + c_2 \cos \psi(t)] \dot{\psi}(t),$$

Отсюда, учитывая (8), имеем

$$\dot{\varphi} e^{\frac{\Delta J \theta(\varphi - \varphi_k)}{J_n(\varphi_k + 0)}} = c_2 \cos \psi(t) - c_1 \sin \psi(t)$$

Продифференцируя это выражение по t [3], получим

$$\left\{ \ddot{\varphi} + \left[\frac{\Delta J \theta(\varphi - \varphi_k)}{J_n(\varphi_k + 0)} \right]' \dot{\varphi}^2 \right\} e^{\frac{\Delta J \theta(\varphi - \varphi_k)}{J_n(\varphi_k + 0)}} = -\frac{\Delta J \theta(\varphi - \varphi_k)}{J_n(\varphi_k + 0)} y(\varphi) \dot{\psi}(t) = -y(\varphi) y'(\varphi) e^{-\frac{\Delta J \theta(\varphi - \varphi_k)}{J_n(\varphi_k + 0)}}$$

или

$$\ddot{\varphi} + \left[\frac{\Delta J \theta(\varphi - \varphi_k)}{J_n(\varphi_k + 0)} \right]' \dot{\varphi}^2 = -\frac{-2\Delta J \theta(\varphi - \varphi_k)}{J_n(\varphi_k + 0)} y(\varphi) y'(\varphi) e^{-\frac{\Delta J \theta(\varphi - \varphi_k)}{J_n(\varphi_k + 0)}} = -\frac{M_n(\varphi)}{J_n(\varphi)}$$

Найдем теперь обобщенную производную

$$\left[\frac{\Delta J \theta(\varphi - \varphi_k)}{J_n(\varphi_k + 0)} \right]'$$

По свойству обобщенной функции имеем

$$\begin{aligned} & \int \left[\frac{\Delta J \theta (\varphi - \varphi_k)}{J_n (\varphi_k + 0)} \right]' \eta(\varphi) d\varphi = \\ & = - \int \frac{\Delta J \theta (\varphi - \varphi_k)}{J_n (\varphi_k + 0)} \eta'(\varphi) d\varphi = \\ & = \frac{\Delta J \eta (\varphi_k)}{J_n (\varphi_k + 0)} = \Delta J \int \frac{\delta (\varphi - \varphi_k)}{J_n (\varphi)} \eta(\varphi) d\varphi \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left[\frac{\Delta J \theta (\varphi - \varphi_k)}{J_n (\varphi)} \right]' = \frac{\Delta J \delta (\varphi - \varphi_k)}{J_n (\varphi)},$$

Отсюда приходим к уравнению (2)

$$\dot{\varphi}(t) = e^{-\frac{\Delta J \theta (\varphi - \varphi_k)}{J_n (\varphi_k + 0)}} [c_2 \cos \psi(t) - c_1 \sin \psi(t)],$$

здесь $\psi(t)$ определяется из уравнения (2'), а $y(\varphi)$ из уравнений (9).

Произвольные постоянные определяются из начальных условий (11): $\dot{\varphi}(t) =$

$$= 2 \int_0^t \left[\dot{\varphi}(t_0) \cos \psi - y(\varphi_0) e^{\int_0^{\varphi} \frac{\Delta J \delta (\varphi - \varphi_k)}{J_n (\varphi)} d\varphi} \sin \psi \right] dt$$

где

$$\psi = 2 \operatorname{arctg} e^{-\dot{\varphi}(t_0) \frac{\Delta J \delta (\varphi - \varphi_k)}{J_n (\varphi)} t}$$

$$y(\varphi) = \left[2 \int_0^{\varphi} \frac{M_n (\varphi)}{J_n (\varphi)} e^{\frac{\Delta J_n \theta (\varphi - \varphi_k)}{J_n (\varphi_k + 0)}} d\varphi \right]^{\frac{1}{2}}$$

Таким образом, в положении, когда механизм меняет свою структуру, т.е. в окрестности точки разрыва инерционных характеристик [4], угловую скорость звена приведения можно вычислить по выражению (11).

Список литературы

1. Джолдасбеков У.А. Теория механизмов и машин. – Алма-Ата, 1979. – 260 с.
2. Джолдасбеков У.А., Уалиев Г.У., Молдабеков М.М., Тулешов А.К. Моделирование механических систем. – Алма-Ата, 1992. – Ч. 1,2. – 103 с.
3. Уалиев Г., Уалиев З.Г. Математическое моделирование динамики механических систем нелинейными характеристиками. – Алматы, 2007. – 332 с.
4. Уалиев Г., Уалиев З.Г. Dynamic of multiloop lever mechanisms with elastic links. Scientific journal of International Federation for the Promotion of Mechanism and Machine Science International conference Mechanics 2014 Tbilisi Georgia "Problems of mechanics". – С. 68-72.