

## ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ И ДОСТОВЕРНОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОБ ОТРАЖЕНИИ И ИНТЕРФЕРЕНЦИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГИХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ

**Мусаев В.К.**

*МЭСИ, Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru*

Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями применяется метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны: методика; алгоритм; комплекс программ. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90. Исследуемая область разбивается по пространственным переменным на треугольные и прямоугольные конечные элементы первого порядка. По временной переменной исследуемая область разбивается на линейные конечные элементы с двумя узловыми точками. Рассмотрены следующие задачи. Отражение упругих волн напряжений в виде дельта функции от свободной поверхности. Отражение упругих волн напряжений в виде функции Хевисайда от свободной поверхности. Отражение упругих волн напряжений в виде дельта функции от жесткой поверхности. Отражение упругих волн напряжений в виде функции Хевисайда от жесткой поверхности. Интерференция плоских продольных упругих волн напряжений в виде дельта функции. Интерференция плоских продольных упругих волн напряжений в виде функции Хевисайда.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, задача с начальными и граничными условиями, задача Коши, численный метод, алгоритм, комплекс программ, конечные элементы первого порядка, явная двухслойная схема, отражение от свободной поверхности, отражение от жесткой поверхности, интерференция, нестационарные волны напряжений, дельта функция, функция Хевисайда, фундаментальное воздействие

## TO EVALUATE THE ACCURACY AND RELIABILITY OF NUMERICAL SIMULATION IN SOLVING PROBLEMS ABOUT THE REFLECTION AND INTERFERENCE OF NON-STATIONARY ELASTIC STRESS WAVES

**Musayev V.K.**

*MESI, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru*

For the solution of two-dimensional plane dynamic problem of elasticity theory with initial and boundary conditions applied finite element method in movements. The problem is solved by a method of capturing, without isolation gaps. On the basis of the finite element method in the movement developed: methods; algorithm; complex programs. When developing complex programs used algorithmic language Fortran-90. The study area is divided into spatial variables on triangular and rectangular finite elements of the first order. In the time variable study area is split into linear finite elements with two nodal points. The following tasks. The reflection of elastic stress waves in the form of a Delta function from the free surface. The reflection of elastic stress waves in the form of Heaviside functions from the free surface. The reflection of elastic stress waves in the form of a Delta function on a rigid surface. The reflection of elastic stress waves in the form of Heaviside functions from a rigid surface. Interference of plane longitudinal elastic stress waves in the form of a Delta function. Interference of plane longitudinal elastic stress waves in the form of Heaviside functions.

**Keywords:** mathematical modeling, problem with initial and boundary conditions, the Cauchy problem, numerical methods, algorithms, complex programs, the final elements of the first order, explicit two-layer scheme, the reflection from the free surface, the reflection from a hard surface, interference, transient waves of voltages, Delta function, Heaviside function, a fundamental impact

### **О некоторых проблемах достоверности результатов численного моделирования нестационарных упругих волн напряжений**

В настоящее время активно применяются численные методы для решения различных задач нестационарной механики деформируемого твердого тела. Однако при решении сложных задач возникают проблемы оценки достоверности полученных результатов. На основании изложенного можно утверждать, что оценка точности и достоверности результатов численного моделирования волн напряжений в областях сложной формы является актуальной фундаментальной и прикладной научной задачей.

Некоторая информация о физической достоверности и математической точности моделирования волн напряжений в деформируемых областях с помощью разработанного численного метода, алгоритма и комплекса программ приведена в следующих работах [1–4, 10].

### **О постановке задачи и реализация численного метода, алгоритма и комплекса программ**

Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями – используем метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом

сквозного счета, без выделения разрывов. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать сложные задачи при нестационарных динамических воздействиях на сложные системы. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90. Исследуемая область разбивается по пространственным переменным на треугольные и прямоугольные конечные элементы первого порядка. По временной переменной исследуемая область разбивается на линейные конечные элементы первого порядка.

Некоторые вопросы в области постановки, разработки методики, алгоритма, комплекса программ и результатах решенных нестационарных динамических задач рассмотрены в следующих работах [1–10].

**О моделировании нестационарных упругих волн в пластинке**

1. Рассмотрим задачу об отражении упругих волн напряжений в виде дельта функции от свободной поверхности. На границе пластинки АВ (рис. 1) приложено нормальное напряжение  $\sigma_y$ , которое при  $0 \leq n \leq 10$  ( $n = t/\Delta t$ ) изменяется линейно от 0 до  $P$ , а при  $n \geq 10$  от  $P$  до 0 ( $P = \sigma_0$ ,  $\sigma_0 = -0,1$  МПа).

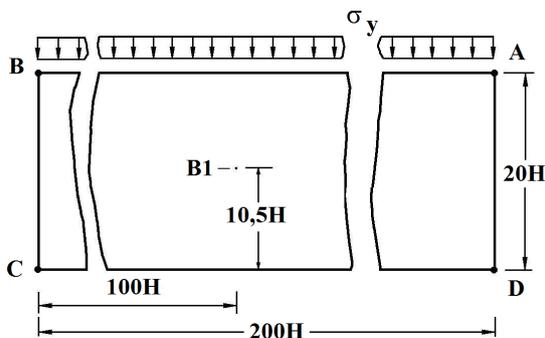


Рис. 1. Постановка задачи об отражении волн напряжений

Граничные условия для контуров ВС и АВ при  $t > 0$   $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$ . Контур CD свободен от нагрузок. Отраженные волны от контуров ВС и AD не доходят до исследуемых точек при  $0 \leq n \leq 190$ . Исследуемая расчетная область имеет 4221 узловую точку и 4000 конечных элементов. Решается система уравнений из 16884 неизвестных. Для примера на рис. 2 представлено изменение нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  ( $\bar{\sigma}_y = \sigma_y / |\sigma_0|$ ) во времени  $n$  в точке В1.

2. Рассмотрим задачу об отражении упругих волн напряжений в виде функции Хевисайда от свободной поверхности.

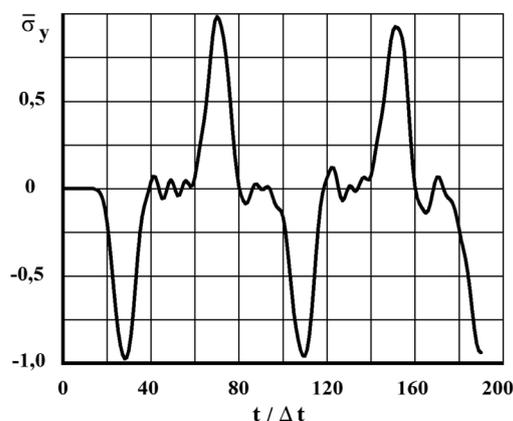


Рис. 2. Изменение упругого нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $n$  в точке В1 в задаче об отражении упругих волн напряжений в виде дельта функции от свободной поверхности

На границе пластинки АВ (рис. 1) приложено нормальное напряжение  $\sigma_y$ , которое при  $0 \leq n \leq 10$  ( $n = t/\Delta t$ ) изменяется линейно от 0 до  $P$ , а при  $n \geq 10$  равно  $P$  ( $P = \sigma_0$ ,  $\sigma_0 = -0,1$  МПа). Граничные условия для контуров ВС и AD при  $t > 0$   $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$ . Контур CD свободен от нагрузок. Отраженные волны от контуров ВС и AD не доходят до исследуемых точек при  $0 \leq n \leq 190$ . Исследуемая расчетная область имеет 4221 узловую точку и 4000 конечных элементов. Решается система уравнений из 16884 неизвестных. Для примера на рис. 3 представлено изменение нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  ( $\bar{\sigma}_y = \sigma_y / |\sigma_0|$ ) во времени  $n$  в точке В1.

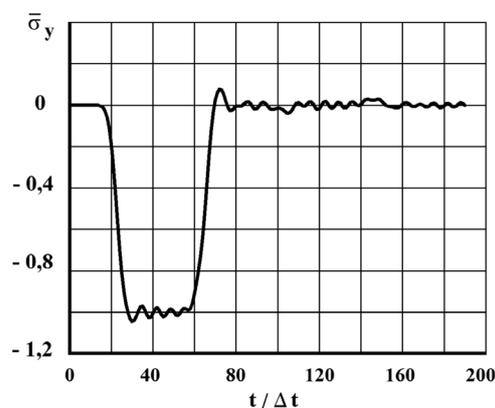


Рис. 3. Изменение нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $n$  в точке В1 в задаче об отражении упругих волн напряжений в виде функции Хевисайда от свободной поверхности

3. Рассмотрим задачу об отражении упругих волн напряжений в виде дельта функции от жесткой поверхности.

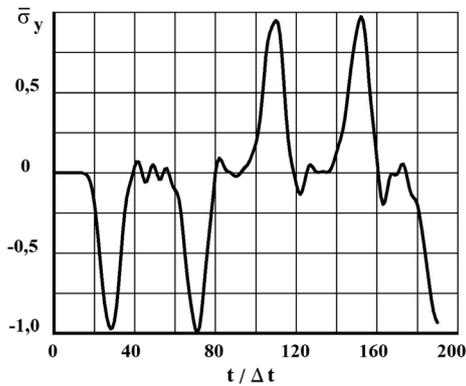


Рис. 4. Изменение нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $n$  в точке В1 в задаче об отражении упругих волн напряжений в виде дельта функции от жесткой поверхности

На границе пластинки АВ (рис. 1) приложено нормальное напряжение  $\sigma_y$ , которое при  $0 \leq n \leq 10$  ( $n = t/\Delta t$ ) изменяется линейно от 0 до  $P$ , а при  $n \geq 10$  от  $P$  до 0 ( $P = \sigma_0$ ,  $\sigma_0 = -0,1$  МПа). Граничные условия для контуров ВС, АД и CD при  $t > 0$   $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$ . Отраженные волны от контуров ВС и АД не доходят до исследуемых точек при  $0 \leq n \leq 190$ . Исследуемая расчетная область имеет 4221 узловую точку и 4000 конечных элементов. Решается система уравнений из 16884 неизвестных. Для примера на рис. 4 представлено изменение нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  ( $\bar{\sigma}_y = \sigma_y / |\sigma_0|$ ) во времени  $n$  в точке В1.

4. Рассмотрим задачу об отражении упругих волн напряжений в виде функции Хевисайда от жесткой поверхности.

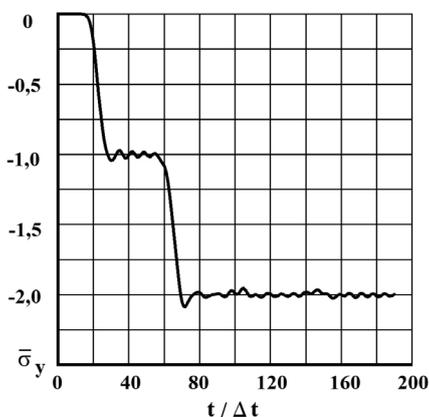


Рис. 5. Изменение нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $n$  в точке В1 в задаче об отражении упругих волн напряжений в виде функции Хевисайда от жесткой поверхности

На границе пластинки АВ (рис. 1) приложено нормальное напряжение  $\sigma_y$ , которое при  $0 \leq n \leq 10$  ( $n = t/\Delta t$ ) изменяется линейно от 0 до  $P$ , а при  $n \geq 10$  равно  $P$  ( $P = \sigma_0$ ,  $\sigma_0 = -0,1$  МПа). Граничные условия для контуров ВС, АД и CD при  $t > 0$   $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$ . Отраженные волны от контуров ВС и АД не доходят до исследуемых точек при  $0 \leq n \leq 190$ . Исследуемая расчетная область имеет 4221 узловую точку и 4000 конечных элементов. Решается система уравнений из 16884 неизвестных. Для примера на рис. 5 представлено изменение нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  ( $\bar{\sigma}_y = \sigma_y / |\sigma_0|$ ) во времени  $n$  в точках В1.

5. Рассмотрим задачу об интерференции плоских продольных упругих волн напряжений в виде дельта функции. На границе пластинки АВ (рис. 6) приложено нормальное напряжение  $\sigma_y$ , которое при  $0 \leq n \leq 10$  ( $n = t/\Delta t$ ) изменяется линейно от 0 до  $P$ , а при  $n \geq 10$  от  $P$  до 0 ( $P = \sigma_0$ ,  $\sigma_0 = -0,1$  МПа). На границе пластинки CD (рис. 6) приложено нормальное напряжение  $\sigma_y$ , которое при  $0 \leq n \leq 10$  изменяется линейно от 0 до  $P$ , а при  $n \geq 10$  от  $P$  до 0 ( $P = \sigma_0$ ,  $\sigma_0 = 0,1$  МПа). Граничные условия для контуров ВС и АД при  $t > 0$   $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$ . Отраженные волны от контуров ВС и АД не доходят до исследуемых точек при  $0 \leq n \leq 190$ . Исследуемая расчетная область имеет 4221 узловую точку и 4000 конечных элементов. Решается система уравнений из 16884 неизвестных. Для примера на рис. 7 представлено изменение нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  ( $\bar{\sigma}_y = \sigma_y / |\sigma_0|$ ) во времени  $n$  в точках В1.

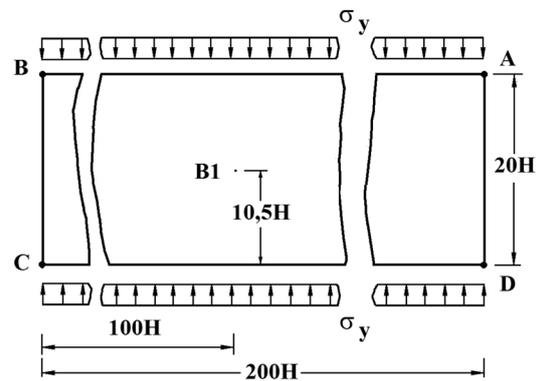


Рис. 6. Постановка задачи об интерференции волн напряжений

6. Рассмотрим задачу об интерференции плоских продольных упругих волн напряжений в виде функции Хевисайда.

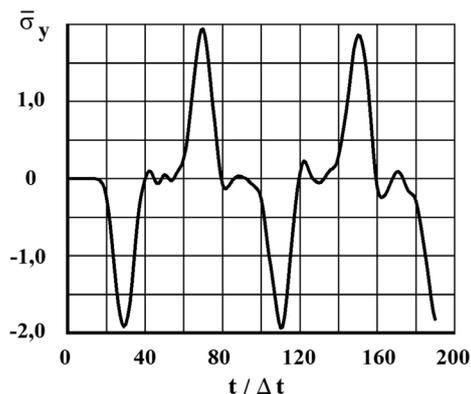


Рис. 7. Изменение нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $n$  в точке В1 в задаче об интерференции плоских продольных упругих волн напряжений в виде дельта функции

На границе пластинки АВ (рис. 6) приложено нормальное напряжение  $\sigma_y$ , которое при  $0 \leq n \leq 10$  ( $n = t/\Delta t$ ) изменяется линейно от 0 до  $P$ , а при  $n \geq 10$  равно  $P$  ( $P = \sigma_0$ ,  $\sigma_0 = -0,1$  МПа). На границе пластинки CD (рис. 6) приложено нормальное напряжение  $\sigma_y$ , которое при  $0 \leq n \leq 10$  изменяется линейно от 0 до  $P$ , а при  $n \geq 10$  равно  $P$  ( $P = \sigma_0$ ,  $\sigma_0 = -0,1$  МПа). Граничные условия для контуров ВС и AD при  $t > 0$   $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$ . Отраженные волны от контуров ВС и AD не доходят до исследуемых точек при  $0 \leq n \leq 190$ . Исследуемая расчетная область имеет 4221 узловую точку и 4000 конечных элементов. Решается система уравнений из 16884 неизвестных. Для примера на рис. 8 представлено изменение нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  ( $\bar{\sigma}_y = \sigma_y / |\sigma_0|$ ) во времени  $n$  в точках В1.

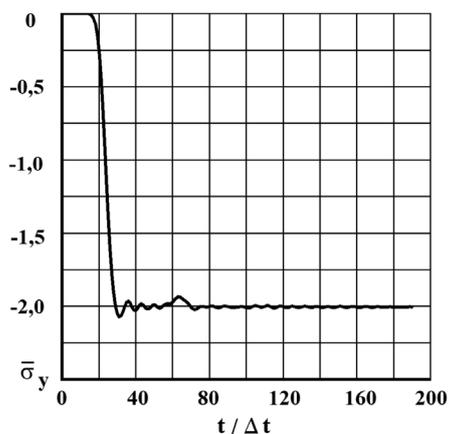


Рис. 8. Изменение нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $n$  в точке В1 в задаче об интерференции плоских продольных упругих волн напряжений в виде функции Хевисайда

### Выводы

1. Сравнение с результатами отражения и интерференции волн напряжений показало хорошее совпадение, что позволяет сделать вывод о физической достоверности и математической точности результатов численного решения динамических задач, полученных методом конечных элементов в перемещениях.

2. Методика, алгоритм, комплекс программ и результаты решенных задач рекомендуются для использования в научно-технических организациях, специализирующихся в области динамического расчета сооружений с окружающей средой при ударных, взрывных и сейсмических воздействиях.

### Список литературы

1. Мусаев В.К. Метод конечных элементов в задаче об отражении плоских продольных волн напряжений в виде дельта функции от свободной поверхности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 1. – С. 43–51.
2. Мусаев В.К. Оценка достоверности и точности результатов вычислительного эксперимента при решении задач нестационарной волновой теории упругости // Научный журнал проблем комплексной безопасности. – 2009. – № 1. – С. 55–80.
3. Мусаев В.К. О достоверности результатов математического моделирования нестационарных волн напряжений в объектах сложной формы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 3. – С. 71–76.
4. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11. – С. 10–14.
5. Мусаев В.К. Математическое моделирование напряженного состояния технических объектов с помощью волновой теории сейсмической безопасности // Проблемы безопасности российского общества. – 2014. – № 3–4. – С. 206–218.
6. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12 (1). – С. 28–32.
7. Мусаев В.К. Моделирование упругих напряжений в защитной оболочке реакторного отделения атомной станции с фундаментом и основанием (полуплоскость) при нестационарном ударном воздействии // Успехи современного естествознания. – 2014, № 12 (часть 5). – С. 587–592.
8. Мусаев В.К. Математическое моделирование поверхностных волн напряжений в задаче Лэмба при воздействии в виде дельта функции // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015, № 2 (часть 1). – С. 25–30.
9. Мусаев В.К. Численное моделирование вертикального сосредоточенного упругого импульсного воздействия в виде дельта функции на границе воздушной и твердой среды с полостью в виде прямоугольника (соотношение ширины к высоте один к пятнадцати) // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015, № 2 (часть 2). – С. 220–223.
10. Мусаев В.К. Численное решение задачи о распространении нестационарных упругих волн напряжений в подкрепленном круглом отверстии // Современные наукоемкие технологии. – 2015, № 2. – С. 93–97.