УДК 517.956

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БИЦАДЗЕ-ЛЫКОВА

Водахова В.А., Нахушева Ф.М., Гучаева З.Х.

ФГБОУ ВПО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова», Нальчик, e-mail: proporwiz@yandex.ru

Для вырождающегося гиперболического уравнения исследован вопрос о существовании решения задачи с нелокальными условиями на характеристиках для уравнения Бицадзе-Лыкова.

Ключевые слова: краевая задача, оператор дробного интегрирования, оператор дробного дифференцирования, задача Коши, уравнение Фредгольма, уравнение Бицадзе-Лыкова

THE PROBLEM WITH NONLOKAL CONDITIONS ON THE CHARACTERISTICS FOR THE BITSADZE-LYKOV EQUATION

Vodakhova V.A., Nakhusheva F.M., Guchaeva Z.K.

Kabardin-Balkar state university n.a. K.M. Berbekov, Nalchik, e-mail: proporwiz@yandex.ru

For degenerate hyperbolic equations investigated the question of existence of solutions of problem with nonlocal conditions on the characteristics for the Bitsadze-Lykov equation.

Keywords: a boundary value problem, operator of fractional differentiation, operator of fractional integration, Fredholm equation, Cauchy problem, Bitsadze-Lykov equation

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$y^2U_{xx} - U_{yy} + aU_x = 0, \qquad (1)$$

где a – действительная постоянная, причем $|a| \le 1$, в характеристическом двуугольнике, ограниченном характеристиками *AC, BC* уравнение (1), выходящими из точки *C*(1/2, 1), и характеристиками *AD, BD,* выходящими из точки *D* (1/2, –1).

Пусть

$$\Omega^+ = \Omega \cap (y > 0), \;\; \Omega^- = \Omega \cap (y < 0),$$

I – интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Задача. Найти решение

$$U(x, y) = \begin{cases} U^+(x, y), & (x, y) \in \Omega^+, \\ U^-(x, y), & (x, y) \in \Omega^- \end{cases}$$

уравнения (1) из класса

$$U(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega^+ \cup I) \cap C^1(\Omega^- \cup I) \cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega^-),$$

удовлетворяющее краевым условиям:

$$U^-(x, y)\Big|_{BD} = \psi(x), \quad 1/2 \le x \le 1, \qquad (2)$$

$$D_{0x}^{\frac{1-a}{4}} x - 1/2U + \left[\Theta_0(x)\right] = c(x)U + (x, 0) + d(x) \qquad (3)$$

и условию сопряжения

$$U_y^+(x, 0) = \alpha(x)U_y^-(x, 0) + \beta(x), \qquad (4)$$

где $\psi(x), c(x), d(x), \alpha(x), \beta(x)$ – заданные функции, причем

$$\psi(x), c(x), d(x), \alpha(x), \beta(x) \in$$
$$\in \;\; C^1(\overline{I}) \cap C^2(I);$$

$D_{0x}^{\ell} f, D_{x1}^{\ell} f$ – операторы дробного в смысле Римана – Лиувилля интегро-дифференцирования [12], $\Theta_0(x)$ – аффикс точки пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки $(x, 0) \in I$, с характеристикой *AC*.

Отметим, что задача относится к классу краевых задач со смещением сформулированных А.М. Нахушевым [7].

Нелокальные задачи для вырождающихся гиперболических уравнений рассматривались и другими авторами [2–5, 8–11].

Доказательство единственности решения задачи

Теорема. В области Ω не может существовать более одного решения задачи, если

$$\alpha(x)=1, \quad c(x)\,x^{\frac{3-a}{4}}-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)}\neq 0\,,$$

$$\left[c(x)\,x^{\frac{3-a}{4}}\right]^{1}\leq 0, \quad c(1)<\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)}.$$

Доказательство. Для доказательства единственности решения задачи воспользуемся методикой, приведенной в работах [8–11].

Пусть

$$\lim_{y\to\pm 0}U(x,y)=\tau(x)\,,\ \lim_{y\to+0}U_y(x,y)=v_+(x)\,,\ \lim_{y\to-0}U_y(x,y)=v_-(x)\,.$$

Пусть $|a|<1$. Известно, что решение задачи Коши для уравнения (1) имеет вид [1].

$$U(x,y)=c_1\int_0^1\tau\left[x+\frac{y^2}{2}(1-2t)\right](1-t)^{\frac{a-3}{4}}t^{-\frac{a+3}{4}}\,dt+c_2y\int_0^1 v\left[x+\frac{y^2}{2}(1-2t)\right](1-t)^{\frac{a-1}{4}}t^{-\frac{a+1}{4}}\,dt\,, \quad (5)$$

где

$$c_1=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)};\ c_2=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)}.$$

Удовлетворяя (5) краевому условию (2), будем иметь

$$c_1\sqrt{1-x}\int_x^1\frac{\tau(\xi)\,(1-\xi)^{\frac{-a+3}{4}}}{(\xi-x)^{\frac{3-a}{4}}}\,d\xi-c_2\int_x^1\frac{v_-(\xi)\,(1-\xi)^{\frac{-a+1}{4}}}{(\xi-x)^{\frac{1-a}{4}}}\,d\xi=\Psi\left(\frac{x+1}{2}\right). \quad (6)$$

Вычислим

$$U\left[\Theta_0(x)\right]=\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)c_1\,x^{\frac{1}{2}}\,D_{0x}^{\frac{a-1}{4}}\,x^{\frac{a-3}{4}}\,\tau(x)+c_2\,\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)D_{0x}^{\frac{a-3}{4}}\,x^{\frac{a-1}{4}}\,v_+(x)\,.$$

Подставляя $U\left[\Theta_0(x)\right]$ в краевое условие (3), будем иметь

$$\left[\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)c_1\,x^{\frac{a-3}{4}}-c(x)\right]\tau(x)+c_2\,\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)D_{0x}^{\frac{1-a}{4}}\,x^{-\frac{1}{2}}\,D_{0x}^{\frac{a-3}{4}}\,x^{\frac{a-1}{4}}\,v_+(x)=d(x)\,. \quad (7)$$

Преобразовав (7) с учетом свойств операторов дробного интегро-дифференцирования, получим

$$\left[\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)c_1\,x^{\frac{a-3}{4}}-c(x)\right]\tau(x)+c_2\,\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)\,x^{\frac{a-3}{4}}\,D_{0x}^{-\frac{1}{2}}\,v_+(x)=d(x)\,. \quad (8)$$

Преобразовав (6), из области Ω^- получим соотношение, принесенное на J

$$v_-(x)=\frac{1}{\pi c_2}\sin\frac{\pi(1-a)}{4}(1-x)^{-\frac{a+1}{4}}\frac{d}{dx}\int_x^1\frac{\psi\left(\frac{t+1}{2}\right)}{(t-x)^{\frac{3+a}{4}}}dt-$$

$$-\frac{c_1}{\pi c_2}\sin\frac{\pi(1-a)}{4}(1-x)^{\frac{a+1}{4}}\frac{d}{dx}\int_x^1\frac{(1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt}{(t-x)^{\frac{3+a}{4}}}\times \tag{9}$$

$$\times\int_t^1\frac{(1-\xi)^{-\frac{a+3}{4}}\,\tau(\xi)\,d\xi}{(\xi-t)^{\frac{3-a}{4}}}.$$

После дальнейших упрощений (9) примет вид:

$$v_-(x)=\frac{1}{\pi c_2}\sin\frac{\pi(1-a)}{4}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)D_{x1}^{\frac{1}{2}}\,\tau(x)-(1-x)^{\frac{a+1}{4}}\,\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)D_{x1}^{\frac{3+a}{4}}\,\psi\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]. \tag{10}$$

Подействовав на обе части (8) оператором $D_{0x}^{\frac{1}{2}}$ будем иметь:

$$v_+(x)=D_{0x}^{\frac{1}{2}}\left[\frac{c(x)\,x^{\frac{3-a}{4}}-c_1\,\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)}{c_2\,\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)}\right]\tau(x)+D_{0x}^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{3-a}{4}}\,d(x). \tag{11}$$

Таким образом, функциональные соотношения между $\tau(x)$ и $v(x)$, принесенные на части Ω^- и Ω^+ смешанной области Ω имеют вид (10), (11) или при $d(x)\equiv 0,\ \psi(x)\equiv 0$ соответственно

$$v_-(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi c_2}\sin\frac{\pi(1-a)}{4}\,D_{x1}^{\frac{1}{2}}\,\tau(x), \tag{12}$$

$$v_+(x)=D_{0x}^{\frac{1}{2}}\,\mu(x)\,\tau(x), \tag{13}$$

где

$$\mu(x)=\frac{1}{c_2\,\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)}\left[c(x)\,x^{\frac{3-a}{4}}-c_1\,\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)\right].$$

Докажем теорему единственности. Рассмотрим интеграл

$$I_1^*=\int_0^1\tau(x)\,v_-(x)\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi c_2}\sin\frac{\pi(1-a)}{4}\int_0^1\tau(x)\,D_{x1}^{\frac{1}{2}}\,\tau(x)\,dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi c_2}\sin\frac{\pi(1-a)}{4}\int_0^1\tau(x)\left[\frac{d}{dx}\int_x^1\frac{\tau(t)\,dt}{(t-x)^{\frac{1}{2}}}\right]dx.$$

С учетом обозначения

$$-\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_x^1 \frac{\tau(t)\,dt}{(t-x)^{\frac{1}{2}}} = \tau_1(x)$$

и воспользовавшись известной формулой для функции $\Gamma(\mu)$:

$$\int\limits_0^\infty t^{\mu-1}\cos kt\ dt = \frac{\Gamma(\mu)}{k^\mu}\cos\frac{\mu\pi}{2},\quad (k>0,\ 0<\mu<1). \tag{14}$$

Полагая в ней $k=|x-\xi|,\quad \mu=1/2$, вычислениями, аналогичным [10-11] , получим:

$$I_1^* = \frac{1}{2c_2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\sin\frac{\pi(1-a)}{4}\left\{\int\limits_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}\,dt\quad \int\limits_0^1\left[\left(\int\limits_0^1 \tau_1(\xi)\cos t\xi\,d\xi\right)^2\right]^{/} dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}\,dt\quad \int\limits_0^1\left[\left(\int\limits_0^1 \tau_1(\xi)\sin t\xi\,d\xi\right)^2\right]^{/} dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{2c_2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\sin\frac{\pi(1-a)}{4}\left\{\int\limits_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}\,dt\quad \left(\int\limits_0^1 \tau_1(\xi)\cos t\xi\,d\xi\right)^2 + \int\limits_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}\,dt\right\} = \left(\int\limits_0^1 \tau_1(\xi)\sin t\xi\,d\xi\right)^2.$$

Отсюда заключаем, что $I_1^* \ge 0$.

Точно также, обозначив

$$\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{\mu(t)\,\tau(t)\,dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} = \tau_2(x)$$

будем иметь

$$I_2^* = \frac{\pi}{2\tilde{A}^2\left(\frac{1}{2}\right)}\left\{\int\limits_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}\,dt\left[\frac{1}{\mu(1)}\left(\int\limits_0^1 \tau_2(\xi)\cos t\xi\,d\xi\right)^2 - \int\limits_0^1\left[\frac{1}{\mu(x)}\right]^{/}\left(\int\limits_0^x \tau_2(\xi)\cos t\xi\,d\xi\right)^2 dx\right] + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}\,dt\left[\frac{1}{\mu(1)}\left(\int\limits_0^1 \tau_2(\xi)\sin t\xi\,d\xi\right)^2 - \int\limits_0^1\left[\frac{1}{\mu(x)}\right]^{/}\left(\int\limits_0^x \tau_2(\xi)\sin t\xi\,d\xi\right)^2 dx\right]\right\}.$$

Отсюда видно, что при выполнении условий теоремы $I_2^* \le 0$. А так как при $\alpha(x)=1,\quad \beta(x)=0$

$$v_+(x) = v_-(x),\ \text{то}\ \int\limits_0^1 \tau(x)\,v_\pm(x)\,dx = 0.$$

Поскольку слагаемые в I_1^* неотрицательны, то они также равны нулю. В частности,

$$\int\limits_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^1 \tau_i(\xi)\cos t\xi\,d\xi\right)^2 dt = 0,$$

$$\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \tau_i(\xi) \sin t\xi \, d\xi \right)^2 dt = 0 \,, \quad i = 1, 2 \,.$$

Так как $t^{-\frac{1}{2}} \geq 0$, то

$$\int_0^1 \tau_i(\xi) \cos t\xi \, d\xi = 0 \,, \quad \int_0^1 \tau_i(\xi) \sin t\xi \, d\xi = 0 \,,$$

для всех $t \in [0, \infty)$, в частности, при $t = 2k\pi, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots$. При таких значениях t функции $\sin t\xi$, $\cos t\xi$ образуют полную ортогональную систему функций в L_2.

Следовательно, $\tau_i(\xi) = 0$ почти всюду, а так как они непрерывны по условию, то $\tau_i(\xi) = 0$ всюду. Отсюда нетрудно усмотреть, что $\tau(x) = 0$ и, следовательно, и $v_\pm(x) = 0$.

Таким образом, $U^\pm(x) = 0$ как решения задачи Коши с нулевыми данными и, следовательно, решение задачи (1) – (4) единственно.

Доказательство существования решения задачи

Удовлетворив (10), (11) условию сопряжения (4), а затем подействовав на обе части уравнения оператором $D_{0x}^{-\frac{1}{2}}$, получим

$$\frac{1}{c_2 \, \Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)} \left[c(x)\, x^{\frac{3-a}{4}} - c_1 \, \Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right) \right] \tau(x) -$$

$$-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi c_2} \sin \frac{\pi(1-a)}{4} \, D_{0x}^{-\frac{1}{2}} \, \alpha(x) \, D_{x1}^{\frac{1}{2}} \, \tau(x) = f(x) \,, \tag{15}$$

где

$$f(x) = D_{0x}^{-\frac{1}{2}} \, \beta(x) - x^{\frac{3-a}{4}} \, d\left(x\right) -$$

$$-\frac{\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)}{\pi c_2} \sin \frac{\pi(1-a)}{4} \, D_{0x}^{-\frac{1}{2}} \, (1-x)^{\frac{a+1}{4}} \, \alpha(x) \, D_{x1}^{\frac{3+a}{4}} \, \psi\left(\frac{x+1}{4}\right).$$

Уравнение (15) с учетом свойств операторов дробного интегро-дифференцирования и исследования правой части эквивалентно редуцируется к сингулярному интегральному уравнению

$$\frac{c(x)\, x^{\frac{3-a}{4}} - c_1 \, \Gamma\left(\frac{1-a}{4} a\right)}{c_2 \, \Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)} \tau(x) + \int_0^1 \frac{k^*(x,\xi)}{\xi - x} \tau(\xi) \, d(\xi) = f(x) \,, \tag{16}$$

где

$$k^*(x,\xi) = (\xi - x)\, k(x,\xi)$$

$$k(x,\xi) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi c_2} \sin \frac{\pi(1-a)}{4} \begin{cases} k_1(x,\xi) - k_3(x,\xi) - k_5(x,\xi), & \xi \leq x \\ k_2(x,\xi) - k_4(x,\xi) - k_5(x,\xi), & \xi \geq x \end{cases}$$

$$k_1(x,\xi)=\frac{1}{\Gamma^2(1/2)}\frac{d}{dx}\int_0^{\xi}\frac{\alpha(t)\,dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}(\xi-t)^{\frac{1}{2}}},$$

$$k_2(x,\xi)=\frac{1}{\Gamma^2(1/2)}\frac{d}{dx}\int_0^{x}\frac{\alpha(t)\,dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}(\xi-t)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$k_3(x,\xi)=\frac{1}{\Gamma^2(1/2)}\int_0^{\xi}\frac{\alpha^{/}(t)\,dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}(\xi-t)^{\frac{1}{2}}},$$

$$k_4(x,\xi)=\frac{1}{\Gamma^2(1/2)}\int_0^{x}\frac{\alpha^{/}(t)\,dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}(\xi-t)^{\frac{1}{2}}}.$$

Условие

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\left[c(x)\,x^{\frac{3-a}{4}}-c_1(x)\,\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)\right]^2+\Gamma^2\left(\frac{3-a}{2}\right)\sin^2\frac{\pi(1-a)}{4}\,\alpha^2(x)\right)\neq 0$$

гарантирует существование регулятора [6], приводящего уравнение (16) к уравнению Фредгольма второго рода при

$$c(x)\,x^{\frac{3-a}{4}}-c_1(x)\,\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)\neq 0.$$

Из возможности приведения задачи к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода и единственности искомого решения, следует существование решения поставленной задачи. По найденному $\tau(x)\in C\left(\bar{I}\right)\cap C^2\left(I\right)$ определяются $\nu_+\left(x\right)$, $\nu_-\left(x\right)$ по формулам (10), (11).

Решение задачи $U\left(x,y\right)$ в областях Ω^- и Ω^+ находится как решение задачи Коши с данными $\tau\left(x\right)$, $\nu_\pm\left(x\right)$.

Список литературы

1. Бицадзе А.В. некоторые классы уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1981.

2. Водахова В.А., Гучаева З.Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного параболо–гиперболического типа с разрывными коэффициентами // Успехи современного естествознания. – 2013. – №11. – С. 136–140.

3. Водахова В.А., Шамеева К.А. Задачи со смещением для системы уравнений первого порядка Лыкова // Известия Кабардино–Балкарского научного центра РАН. – 2013. – №2(52). – С.3–7.

4. Водахова В.А., Гучаева З.Х. Нелокальная задача со смещением для нагруженного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Успехи современного естествознания. – 2014. – №7. – С. 90–92.

5. Гучаева З.Х., Бесланеева Л.Ю. Нелокальная задача для вырождающегося гиперболического уравнения с операторами дробного интегро–дифференцирования в краевом условии// Успехи современного естествознания. – 2014. – №3. – С.81–87.

6. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.– М.: Физматиз, – 1962.

7. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных.– М.: Наука, –2006. –287с.

8. Репин О.А., Кумыкова С.К. О задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2012. – №9 (100). – С.52–60.

9. Репин О.А., Кумыкова С.К. Задача с обобщенными операторами дробного дифференцирования для уравнения Бицадзе–Лыкова // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2014. – Т. 16. – №91. – С.24–32.

10. Репин О.А., Кумыкова С.К. Нелокальная задача с дробными производными дробного для уравнения смешанного типа // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2014. – №8. – С.79–85.

11. Репин О.А., Кумыкова С.К. Задача со смещением для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико–математические науки». – 2014. – №1 (34). – С.37–47.

12. Самко С. Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.