УДК 517.1

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА СЕТОК ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

[1]Жунусова Л.Х., [2]Тойганбаева Н.А.

[1]Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, e-mail: khafizovna_66@mail.ru

[2]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы

Сложные вычислительные задачи, возникающие при моделировании технических устроиств и процессов можно развить на ряд элементарных: вычисление интергалов, решение дифференциальных уравнениии, определение экстремумов функции и т.д. Для таких задач уже разработаны методы решения, созданы компьютерные программы их решения В данной работе рассмотрены методы решения задач эллиптического типа. Несмотря на то, что постановка задач является классической, благодаря бурному развитию информационно-коммуникационным технологиям решение такого рода задач нетеряют свою актуальность. Применяется метод сеток. И проанализирован численный результат.

Ключевые слова: математическое моделирование, вычислительная математика, аппроксимация, уравнение Лапласса , метод сеток.

USING NETS FOR NUMERICAL SOLUTION OF THE LAPLACE EQUATION

[1]Zhunussova L.Kh., [2]Toiganbayeva N.A.

[1]Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, e-mail: khafizovna_66@mail.ru

[2]Kazakh National University named after AL-Farabi, Almaty

Complex computational problems arising in the modeling of technical devices and processes can be developed into a series of elementary: integral calculation, solution of differential equations defined extremum of the function, etc. For such problems, methods have been developed solutions, created a computer program to solve them. In this paper some methods for solving elliptic type. Despite the fact that setting goals is a classic, thanks to the rapid development of information and communication technologies solve such problems captive, its relevance. The method of nets. And analyze the numerical result.

Keywords: mathematical modeling, computational mathematics, approximation, equation Laplassa, grid method.

Введение

Современные компьютеры дали в руки исследователей эффективное средство для математического моделирования сложных задач науки и техники. Поэтому количественные методы исследования в настоящее время проникли практически во все сферы человеческой деятельности.

Реализация математических моделей на компьютере осуществляется с помощью методов вычислительной математики, которая непрерывно совершенствуется вместе с прогрессом в области информационно-коммуникационных технологии[1],[2]. Рассмотрим уравнение Лапласса

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0. \qquad (1)$$

Будем искать его решение, непрерывное в прямоугольнике и

$\overline{G} = G \bigcup \Gamma = \{x = (x_1, x_2) : 0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$, принимающее на границе Г заданные значения:

$$u|_\Gamma = \mu(x). \qquad (2)$$

Задача, определяемая уравнением (1) и условием (2), называется *задачей Дирихле (первой краевой задачей).*

Постановка задачи**.**Для численного решения задачи (1), (2) введем в $\overline{G}$ сетку

$$\overline{\omega_h} = \omega_h \bigcup \gamma_h = \{x_i = (i_1 h_1, i_2 h_2),$$

$$i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha, \ h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha, \quad \alpha = 1, 2\}$$

и обозначим через

$$y_i = y_{i_1 i_2} = y(i_1, i_2) = y(x_i)$$

сеточную функцию, заданную на $\overline{\omega_h}$; h_1 и h_2 – шаги сетки по координатам x_1 и x_2.

Чтобы написать разностную схему для (1), (2), аппроксимируем каждую из производных $\partial^2 u / \partial x_\alpha^2$ на трехточечном шаблоне, полагая

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \sim \frac{u(x_1 - h_1, x_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1 + h_1, x_2)}{h_1^2} = u_{\bar{x}_1 x_1},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \sim \frac{u(x_1, x_2 - h_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1, x_2 + h_2)}{h_2^2} = u_{\bar{x}_2 x_2},$$

знак ~ означает аппроксимацию. Пользуясь этими выражениями, заменим (1) разностным уравнением

$$\frac{y(i_1 - 1, i_2) - 2y(i_1, i_2) + (i_1 + 1, i_2)}{h_1^2} + \frac{y(i_1, i_2 - 1) - 2y(i_1, i_2) + y(i_1, i_2 + 1)}{h_2^2} = 0, \qquad (3)$$

или, в сокращенной записи,

$$y_{\bar{x}_1 x_1}(i_1, i_2) + y_{\bar{x}_2 x_2}(i_1, i_2) = 0.$$

В безындексных обозначениях имеем

$$y_{\bar{x}_1 x_1}(x) + y_{\bar{x}_2 x_2}(x) = 0,$$
$$x = (i_1 h_1, i_2 h_2) \in \omega_h(G). \qquad (4)$$

К этому уравнению надо присоединить краевые условия

$$y = \mu(x), \qquad x = (i_1 h_1, \quad i_2 h_2) \in \gamma_h. \quad (5)$$

Граница γ_h сетки состоит из всех узлов $(0, i_2)$, (N_1, i_2), $(i_1, 0)$, (i_1, N_2), кроме вершин прямоугольника (0, 0) $(0, N_2)$, $(N_1, 0)$, (N_1, N_2), которые не используются. Разностное уравнение (3) записано на пятиточечном шаблоне

$$(i_1 - 1, i_2), \qquad (i_1 + 1, i_2), \qquad (i_1, i_2),$$
$$(i_1, i_2 - 1), \qquad (i_1, i_2 + 1).$$

Схему (4) часто называют схемой *крест*. Если $h_1 = h_2 = h$, т.е. сетки по x_1 и x_2 совпадают, то сетку ω_h называют *квадратной.* На такой сетке разностную схему (4) можно записать в виде

$$y(i_1, i_2) = \frac{y(i_1 - 1, i_2) + y(i_1 + 1, i_2) + y(i_1, i_2 - 1) + y(i_1, i_2 + 1)}{4}.$$

Для однородного уравнения $(f = 0)$ получаем

$$y(i_1, i_2) = \frac{1}{4}\left[y(i_1 - 1, i_2) + y(i_1 + 1, i_2) + y(i_1, i_2 - 1) + y(i_1, i_2 + 1)\right],$$

т.е. значение в центре шаблона определяется как среднее арифметическое значений в остальных узлах шаблона[3],[4],[5].

Пусть $u = u(x)$ – решение задачи Дирихле (1), (2), а $y = y(i_1, i_2)$ – решение разностной задачи (4), (5). Рассмотрим погрешность

$$z(x) = y(x) - u(x), \;\; x = (i_1 h_1, i_2 h_2) \in \omega_h.$$

Подставляя $y = z + u$ в (4), (5), получаем для погрешности $z = z(x)$ неоднородное уравнение

$$\Lambda z = z_{\bar{x}_1 x_1} + z_{\bar{x}_2 x_2} = -\psi(x), x \in \omega_h(G) \; (6)$$

с однородным краевым условием

$$z = 0 \;\; \text{при} \;\; x \in \gamma_h. \qquad (7)$$

здесь

$$\psi(x) = \Lambda u = u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2} \qquad (8)$$

есть невязка или погрешность аппроксимации для схемы (4) на решении $u = u(x)$ уравнения (1).

Покажем, что

$$|\psi| \le \mathrm{M}_4 \frac{h_1^2 + h_2^2}{24}, \qquad (9)$$

где

$$\mathrm{M}_4 = \max_{x \in G}\left(\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}\right|, \left|\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}\right|\right).$$

В самом деле, учитывая формулы

$$u(x_1 \pm h_1, x_2) = u(x_1, x_2) \pm h_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{h_1^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) \pm \frac{h_1^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}(x_1, x_2) + \frac{h_1^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}(\bar{x}_1, x_2),$$

$$\bar{x}_1 = x_1 + \theta_1 h_1, \qquad 0 \le \theta_1 \le 1,$$

$$u(x_1, x_2 \pm h_2) = u(x_1, x_2) \pm h_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) + \frac{h_2^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \pm$$

$$\pm \frac{h_2^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}(x_1, x_2) + \frac{h_2^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(x_1, \bar{x}_2), \qquad \bar{x}_2 = x_2 + \theta_2 h_2,$$

$$0 \le \theta_2 \le 1,$$

находим

$$\psi = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - f(x)\right) + \frac{h_1^2}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}(\bar{x}_1, x_2) + \frac{h_2^2}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(x_1, \bar{x}_2).$$

Отсюда и из (1) следует (9).

Таким образом, схема (4) имеет второй порядок аппроксимации.

Рассмотрим на примере следующую задачу:

Найти непрерывную функцию и(x, *y*), удовлетворяющую внутри прямоугольной области $\Omega = \{(x, y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ уравнению Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0.$$

и принимающую на границе области W заданные значения, т. е.

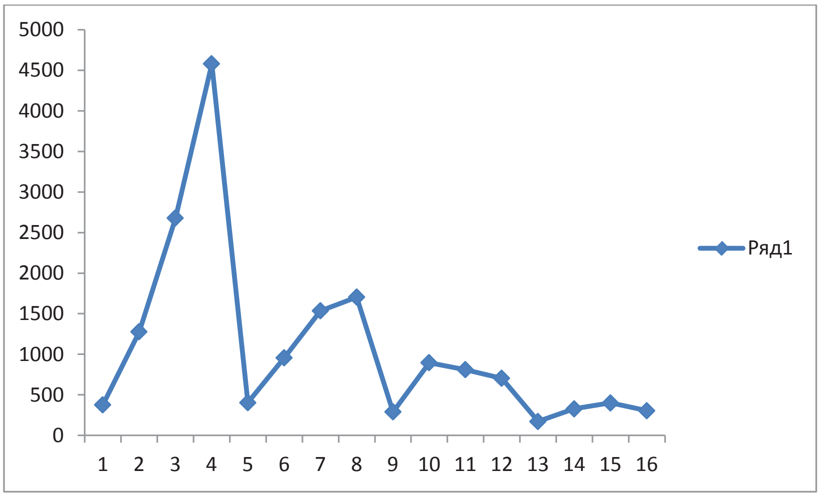
$$u(0, y) = -10y^2 - 8y + 6, \quad y \in [0,1],$$

$$u(a, y) = -10y^2 - 30y + 22, \quad y \in [0,1],$$

$$u(x,0) = 9x^2 + 7x + 6, \quad x \in [0,1],$$

$$u(x,b) = 9x^2 - 15x - 12, \quad x \in [0,1],$$

Для ее решение составлена программа вычисление алгоритма метода сеток. Полученный численный расчет проанализированны и поведение решение показано на рисунке.



Поведение решение

Заключение

Понятие аппроксимации, устойчивости и сходимости создали необходимую базу широкого поиска эффективных разностных схем для решения задач математической физики. Алгоритмы решения задач с помощью конечно-разностных методов, представляют собой сочетание методов построения разностных аналогов задач и методов их решения. Поэтому прогресс в теории конечно-разностных методов обязан взаимосогласованному развитию этих направлении исследовании.

Список литературы

1. Буслов В.А., Яковлев С.Л. Численные методы: в 2-х ч. – СПб., 2001.

2. George W. Collins, II. Fundamental Numerical Methods and Data Analysis. 2003.

3. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.

4. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике: учебное пособие – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 523 с: ил.

5. Джон Г. Мэтьюз, Куртис Д. Финк. Численные методы. Использование MatLab. 3-издание / перевод с английского. М.: Вильямс, 2001. – 720 с.