

УДК.517.956.6

ВНУТРЕННЕКРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Водахова В.А., Тлупова Р.Г., Шерметова М.Х.

ФГБОУ ВПО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова»,
Нальчик, e-mail: mariyana1992@mail.ru

Исследован вопрос однозначной разрешимости внутренней краевой задачи для нагруженного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками.

Ключевые слова: функция Грина, нагруженное уравнение, уравнение Вольтерра, внутреннекраевая задача.

INSIDE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LOADED EQUATION OF THE THIRD ORDER WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

Vodakhova V.A., Tlupova R.G., Shermetova M.Kh.

FGBOU VPO «Kabardin-Balkar state university n.a. Kh. M. Berbekov», Nalchik,
e-mail: mariyana1992@mail.ru

In the paper uniqueness and the existence of solution inside boundary value problem is proved for the equation of the third order with multiple characteristics.

Keywords: Volterra equation, inside boundary value problem, loaded equation, Green function.

Введение

Успехи современного естествознания требуют дальнейшего развития теории дифференциальных уравнений в частных производных, что приводит к необходимости исследования локальных и нелокальных задач для нагруженных уравнений различных типов. В последние годы появилось значительное число публикаций, проблемно ориентированных на нагруженные уравнения [4, 7, 10], где исследовались локальные и нелокальные краевые и внутреннекраевые задачи для нагруженных уравнений в частных производных гиперболического, параболического, эллиптического и смешанного типов. Следует отметить такие применения нагруженных уравнений, как метод математического моделирования нелокальных, в том числе фрактальных, процессов и явлений, и метод эффективного поиска решений дифференциальных уравнений. Математической основой физики фракталов, в особенности дробной динамики, стали нагруженные дифференциальные уравнения, демонстрирующие роль этих уравнений в различных отраслях современной науки. Актуальность исследования краевых задач для нагруженных уравнений можно обосновать как внутренними потребностями теоретического обобщения результатов, так и прикладным значениям.

Цель исследования: доказать однозначную разрешимость внутреннекраевой задачи для нагруженного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками.

Постановка задачи. В области $D = \{0 < x < l, 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$U_y = U_{xxx} + a(x, y)U_x + \lambda(y)U(x_0, y). \quad (1)$$

Задача А. Найти регулярное в области D решение уравнения (1), из класса $C(\bar{D}) \cap C_{x,y}^{(3,1)}(D)$ с непрерывной вплоть до $x=l$ производной первого порядка по x , удовлетворяющее условиям:

$$U(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$U(x, y) = \varphi_1(y), \quad U_x(0, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \left[\alpha_1(y) \frac{\partial U}{\partial x} + \beta_1(y) U(x, y) \right]_{x=x_0} = \\ & = \left[\alpha_2(y) \frac{\partial U}{\partial x} + \beta_2(y) U(x, y) \right]_{x=l} + \\ & + \delta(y), \quad 0 \leq y \leq T, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\tau(y)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\alpha_1(y)$, $\alpha_2(y)$, $\beta_1(y)$, $\beta_2(y)$, $\delta(y)$ – заданные функции, непрерывные в замыкании области их определения, x_0 – фиксированная точка интервала $0 < x < l$ причем $\beta_2(y) \neq 0$.

Задача А относится к классу нелокальных задач, исследованием которых занимались многие авторы [1 – 6, 8].

Доказательство существования и единственности решения. Рассмотрим случай, когда $a(x, y) = 0$, то есть уравнение

$$U_y = U_{xxx} + \lambda(y)U(x_0, y). \quad (5)$$

Пусть существует решение $U(x, y)$ задачи (2)-(4),

$$U(l, y) = \varphi(y), \quad 0 < y < T, \quad (6)$$

для уравнения (5).

Функция Грина задачи (2),(3),(6) для уравнения

$$U_{xxx} - U_y = 0 \quad (7)$$

задается формулой [6, 8]:

$$G(x, y; \xi, \eta) = U(x, y; \xi, \eta) - V(x, y; \xi, \eta)$$

где $U(x, y; \xi, \eta)$, $V(x, y; \xi, \eta)$ – фундаментальные решения уравнения (7), которые имеют вид:

$$U(x, y; \xi, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{(y-n)^{1/3}} f\left(\frac{x-\xi}{(y-n)^{1/3}}\right), & y > \eta, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases}$$

$$V(x, y; \xi, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{(y-n)^{1/3}} \bar{\varphi}\left(\frac{x-\xi}{(y-n)^{1/3}}\right), & y > \eta, \\ 0, & y \leq \eta, \end{cases}$$

где

$$f = \frac{\pi}{3} \frac{\sqrt{z}}{3} \left[I_{1/3} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} z^{3/2} \right) + I_{-1/3} \frac{2}{3\sqrt{3}} z^{3/2} \right],$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\pi}{3} \frac{\sqrt{z}}{3} \left[I_{1/3} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} z^{3/2} \right) - I_{-1/3} \frac{2}{3\sqrt{3}} z^{3/2} \right],$$

$I_\nu(z)$ – функция Бесселя, функция $f(z)$ и $\bar{\varphi}$ – функции Эйри и удовлетворяют уравнению [9]:

$$t''(z) + z t(z)/3 = 0.$$

Основные свойства функций $U(x, y; \xi, \eta)$ и $V(x, y; \xi, \eta)$, их оценки вместе с частными производными порядка ≥ 1 приведены в [6, 8].

Из свойств функции Грина заключаем, что решение $U(x, y)$ в области D представимо в виде

$$\pi U(x, y) = \int_0^y G_{\xi\xi}(x, y; 0, \eta) \varphi_1(\eta) d\eta -$$

$$- \int_0^y G_\xi(x, y; 0, \eta) \varphi_2(\eta) d\eta -$$

$$- \int_0^y G_{\xi\xi}(x, y; l, \eta) \varphi(\eta) d\eta + \int_0^l G(x, y; \xi, 0) \tau(\xi) d\xi -$$

$$- \int_0^y \lambda(\eta) \tilde{G}(x, y; \eta) U(x_0, \eta) d\eta,$$

где

$$\tilde{G}(x, y; \eta) = \int_0^y G(x, y; \xi, \eta) d\xi.$$

Найдем значение $U(x_0, y)$. Для этого положим $x = x_0$, в последнем равенстве. Получим:

$$\pi U(x_0, y) = \int_0^y G_{\xi\xi}(x_0, y; 0, \eta) \varphi_1(\eta) d\eta - \int_0^y G_\xi(x_0, y; 0, \eta) \varphi_2(\eta) d\eta -$$

$$- \int_0^y G_{\xi\xi}(x_0, y; l, \eta) \varphi(\eta) d\eta + \int_0^l G(x_0, y; \xi, 0) \tau(\xi) d\xi - \int_0^y \lambda(\eta) \tilde{G}(x_0, y; \eta) U(x_0, \eta) d\eta. \quad (8)$$

Обозначим $U(x_0, y) = \psi(y)$, тогда (8) перепишется в виде:

$$\pi \psi(y) = \int_0^y \lambda(\eta) G_1(y; \eta) \psi(\eta) d\eta = \tilde{\psi}(y), \quad (9)$$

где

$$\tilde{\psi}(y) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^y G_{\xi\xi}(x_0, y; 0, \eta) \varphi_1(\eta) d\eta - \int_0^y G_\xi(x_0, y; 0, \eta) \varphi_2(\eta) d\eta - \right.$$

$$\left. - \int_0^y G_{\xi\xi}(x_0, y; l, \eta) \varphi(\eta) d\eta + \int_0^l G(x_0, y; \xi, 0) \tau(\xi) d\xi \right\}, \quad (10)$$

$$G_1 = \tilde{G}(x_0, y; \eta).$$

Равенство (9) есть интегральное уравнение Вольтера второго рода, которое однозначно разрешимо.

Решение интегрального уравнения (9) можно выписать через резольвенту $R(x, y; \xi, \eta)$ ядра $\lambda(y) G_1(y; \eta)$:

Таким образом, решение задачи $\psi(y) = \tilde{\psi}(y) - \frac{1}{\pi} \int_0^y R(x, y; \xi, \eta) \tilde{\psi}(\eta) d\eta$. (11) (1),(2),(3), и $U(l, y) = \varphi(y)$ имеет вид

$$U(x, y) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^y G_{\xi\xi}(x, y; 0, \eta) \varphi_1(\eta) d\eta - \int_0^y G_{\xi}(x, y; 0, \eta) \varphi_2(\eta) d\eta - \right. \\ \left. - \int_0^y G_{\xi\xi}(x, y; l, \eta) \varphi(\eta) d\eta + \int_0^l G(x, y; \xi, 0) \tau(\xi) d\xi - \int_0^y R(x, y; \xi, \eta) \tilde{\psi}(\eta) d\eta \right\}, \quad (12)$$

Удовлетворим краевому условию (4). Для этого из (12) найдем U_x . Имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^y G_{\xi\xi x}(x, y; 0, \eta) \varphi_1(\eta) d\eta - \int_0^y G_{\xi x}(x, y; 0, \eta) \varphi_2(\eta) d\eta - \right. \\ \left. - \int_0^y G_{\xi\xi x}(x, y; l, \eta) \varphi(\eta) d\eta + \int_0^l G_x(x, y; \xi, 0) \tau(\xi) d\xi - \int_0^y R_x(x, y; \xi, \eta) \tilde{\psi}(\eta) d\eta \right\}. \quad (13)$$

Подставим (13) в краевое условие (4). В результате получим равенство:

$$\alpha_1(y) \left[\int_0^y G_{\xi\xi x}(x_0, y; 0, \eta) \varphi_1(\eta) d\eta - \int_0^y G_{\xi x}(x_0, y; 0, \eta) \varphi_2(\eta) d\eta - \right. \\ \left. - \int_0^y G_{\xi\xi x}(x_0, y; l, \eta) \varphi(\eta) d\eta + \int_0^l G_x(x_0, y; \xi, 0) \tau(\xi) d\xi - \int_0^y R_x(x_0, y; \xi, \eta) \tilde{\psi}(\eta) d\eta \right] + \\ + \beta_1(y) \left[\int_0^y G_{\xi\xi}(x_0, y; 0, \eta) \varphi_1(\eta) d\eta - \int_0^y G_{\xi}(x_0, y; 0, \eta) \varphi_2(\eta) d\eta - \int_0^y G_{\xi\xi}(x_0, y; l, \eta) \varphi(\eta) d\eta + \right. \\ \left. + \int_0^l G(x_0, y; \xi, 0) \tau(\xi) d\xi - \int_0^y R(x_0, y; \xi, \eta) \tilde{\psi}(\eta) d\eta \right] = \alpha_2(y) \left[\int_0^y G_{\xi\xi x}(l, y; 0, \eta) \varphi_1(\eta) d\eta - \right. \\ \left. - \int_0^y G_{\xi x}(l, y; 0, \eta) \varphi_2(\eta) d\eta - \int_0^y G_{\xi\xi x}(l, y; l, \eta) \varphi(\eta) d\eta + \int_0^l G_x(l, y; \xi, 0) \tau(\xi) d\xi - \right. \\ \left. - \int_0^y R_x(l, y; \xi, \eta) \tilde{\psi}(\eta) d\eta \right] + \beta_2(y) \varphi(y) + \delta(y). \quad (14)$$

Преобразовав (14) с учетом (10), получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно функции $\varphi(y)$

$$\beta_2(y) \varphi(y) + \int_0^y Q(y, \eta) \varphi(\eta) d\eta = g(y), \quad (15)$$

где

$$Q(y, \eta) = \alpha_2(y) [G_{\xi\xi x}(l, y; l, \eta) + R_x(l, y; \xi, \eta) G_{\xi\xi x}(l, y; l, \eta)] - \\ - \alpha_1(y) [G_{\xi\xi x}(x_0, y; l, \eta) - R_x(x_0, y; \xi, \eta) G_{\xi\xi x}(x_0, y; l, \eta)] - \\ - \beta_1(y) [G_{\xi}(x_0, y; l, \eta) - R_x(x_0, y; \xi, \eta) G_{\xi\xi x}(x_0, y; l, \eta)] \\ g(y) = \frac{\alpha_1(y)}{\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[M(x, y) + \int_0^y R(x, y; \xi, \eta) M(\xi, \eta) d\xi \right] + \right. \\ \left. \frac{\beta_1(y)}{\pi} \left[M(x, y) + \int_0^y R(x, y; \xi, \eta) M(\xi, \eta) d\xi \right] \right\} \Big|_{x=x_0} -$$

$$-\frac{\alpha_2(y)}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left[M(x, y) + \int_0^y R(x, y; \xi, \eta) M(\xi, \eta) d\xi \right] \Big|_{x=l},$$

$$M(x, y) = \int_0^y G_{\xi\xi}(x_0, y; \xi, \eta) \varphi_1(\eta) d\eta - \int_0^y G_{\xi}(x_0, y; \xi, \eta) \varphi_2(\eta) d\eta - \int_0^y G(x_0, y; \xi, 0) \tau(\xi) d\xi.$$

По условию $\beta_2(y) \neq 0$, то есть (15) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, которое безусловно и однозначно разрешимо в классе $C(0 \leq y \leq T)$. Обращая его через резольвенту ядра $Q(x, y)$ получим значение $\varphi(y)$ то есть $U(x_0, y)$.

Таким образом, решение задачи (2)-(4) и (6), существует, единственно и определяется по формуле (12).

В случае, когда $a(x, y) \neq 0$ опираясь на

свойства функции Грина для задачи (7), (2)-(3) и $U(l, y) = \varphi(y)$ имеем (15)

$$U(x, y) = \int_0^y d\eta \int_0^l G(x, y; \xi, \eta) a(\xi, \eta) U_{\xi}(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_0^y U(x_0, \eta) d\eta \int_0^l \lambda(\eta) G(x, y; \xi, \eta) d\xi.$$

Интегрируя внутренний интеграл в первом слагаемом по частям, получим:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_0^y d\eta \left\{ U(\xi, \eta) a(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta) \Big|_0^l - \int_0^y \frac{\partial}{\partial \xi} [G(x, y; \xi, \eta) a(\xi, \eta)] U(\xi, \eta) d\xi \right\} + \\ &+ \int_0^y \lambda(\eta) U(x_0, \eta) d\eta \int_0^l G(x, y; \xi, \eta) d\xi = \int_0^y d\eta \{ U(l, \eta) a(l, \eta) G(x, y; l, \eta) - U(0, \eta) a(0, \eta) * \\ &* G(x, y; 0, \eta) - \int_0^y \frac{\partial}{\partial \xi} [G(x, y; \xi, \eta) a(\xi, \eta)] U(\xi, \eta) d\xi \} + \int_0^y \lambda(\eta) U(x_0, \eta) d\eta \int_0^l G(x, y; \xi, \eta) d\xi = \\ &= \int_0^y d\eta \left\{ \varphi(\eta) a(l, \eta) G(x, y; l, \eta) - \varphi_1(\eta) a(0, \eta) G(x, y; 0, \eta) - \int_0^y \frac{\partial}{\partial \xi} [G(x, y; \xi, \eta) a(\xi, \eta)] U(\xi, \eta) d\xi \right\} + \\ &+ \int_0^y \lambda(\eta) U(x_0, \eta) d\eta \int_0^l G(x, y; \xi, \eta) d\xi. \end{aligned} \quad (16)$$

Равенство (16) перепишем в виде (17)

$$U(x, y) + \int_0^y \int_0^l T(x, y; \xi, \eta) U(\xi, \eta) d\xi d\eta = F(x, y)$$

где

$$\begin{aligned} T(x, y; \xi, \eta) &= \frac{\partial}{\partial \xi} [G(x, y; \xi, \eta) a(\xi, \eta)], \\ F(x, y) &= \int_0^y \{ a(l, \eta) G(x, y; l, \eta) \varphi(\eta) - a(0, \eta) G(x, y; 0, \eta) \varphi_1(\eta) \} d\eta + \\ &+ \int_0^y P(x, y; \eta) U(x_0, \eta) d\eta. \end{aligned}$$

Обращая (17) через резольвенту $R(x, y; \xi, \eta)$ ядра $T(x, y; \xi, \eta)$ будем иметь

$$U(x, y) = F(x, y) + \int_0^y \int_0^l R(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

или

$$\begin{aligned}
 U(x, y) = & \int_0^y \{a(l, \eta)G(x, y; l, \eta)\varphi(\eta)d\eta - a(0, \eta)G(x, y; 0, \eta)\varphi_1(\eta)\}d\eta + \\
 & + \int_0^y \{a(l, \eta)G(x, y; l, \eta)\varphi(\eta) - a(0, \eta)G(x, y; 0, \eta)\varphi_1(\eta)\}d\eta + \\
 & + \int_0^\eta P(x, y; \eta)U(x_0, \eta)d\eta + \int_0^y \int_0^l R(x, y; \xi, \eta) \left[\int_0^y \{a(l, \eta_1)G(\xi, \eta; l, \eta_1)\varphi(\eta_1)d\eta_1 - \right. \\
 & \left. - a(0, \eta_1)G(\xi, \eta; 0, \eta_1)\varphi_1(\eta_1)\} d\eta + \int_0^\eta P(\xi, \eta; \eta_1)U(x_0, \eta_1)d\eta_1 \right] d\xi d\eta.
 \end{aligned} \tag{18}$$

После преобразования (18), получим

$$U(x, y) - \int_0^y \tilde{P}(x, y)U(x, y)d\eta = \int_0^y \tilde{G}(x, y; \eta)\varphi(\eta)d\eta + f(x, y) \tag{19}$$

где $\tilde{P}(x, y)$ и $f(x, y)$ выражаются через интегралы от a и G . Полагая в (18) $x = x_0$ и считая пока правую часть ее известной, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $U(x_0, y) = \psi(y)$

$$\begin{aligned}
 \psi(y) - \int_0^y \tilde{P}(x, y)\psi(\eta)d\eta = \\
 = \int_0^y \tilde{G}(x_0, y; \eta)\varphi(\eta)d\eta + f(x_0, y)
 \end{aligned}$$

которое имеет только одно решение.

Найденное значение $U(x_0, y)$ подставим в равенство (19). Удовлетворяя его граничному условию (4), снова получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\varphi(\eta)$, которое однозначно разрешимо.

Список литературы

1. Водахова В.А. Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Дифференциальные уравнения. Минск. – 1982. – Т.18, №2. – С.280-285.

2. Водахова В.А. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с нелокальным условием А.М. Нахушева // Дифференциальные уравнения. Минск. – 1983. – Т.19, №1. – С.163-166.

3. Водахова В.А., Гучаева З.Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа с разрывными коэффициентами // Успехи современного естествознания. – 2013. – №11. – С.136-140.

4. Водахова В.А., Гучаева З.Х. Нелокальная задача для нагруженного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Успехи современного естествознания. – 2014. – №7. – С.90-92.

5. Водахова В.А., Шамеева К.А. Задачи со смещением для системы уравнений первого порядка Лыкова // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2013. – №2 (52). – С.3-7.

6. Джураев Т.Д., Иргашев Ю.И. О краевой задаче Каттабрига для нелинейных уравнений третьего порядка с кратными характеристиками. – Ташкент: ФАН, 1976. – С.141-155.

7. Дженашев М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. – Алматы: Компьютерный центр ИТПМ, 1995. – 270 с.

8. Елеев В.А. Краевые задачи для нагруженного гипербола-параболического уравнения с характеристической линией изменения типа // Украинский мат.журнал. – 1995. – Т.47, №12. – С.1639-1652.

9. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М., Л.: Физматгиз, 1963. – 358 с.

10. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения. – М.: Наука, 2012. – 232 с.