УДК.517.956.(927)

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Водахова В.А., Гучаева З.Х.

ФГБОУ ВПО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова» Министерства образования и науки РФ, Нальчик, e-mail: proporwiz@yandex.ru

Для нагруженного уравнения третьего порядка *с* кратными характеристиками исследован вопрос однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи.

Ключевые слова: нелокальная задача, нагруженное уравнение, уравнение Вольтерра, функция Грина

NONLOKAL PROBLEM FOR THE LOADED EQUATION OF THE THIRD ORDER WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

Vodakhova V.A., Guchaeva Z.K.

Kabardin-Balkar state university n.a. Kh. M. Berbekov, Nalchik, e-mail: proporwiz@yandex.ru

Nonlokal problem investigated for the loaded equation for the third order with multiple characteristics.

Keywords: Nonlokal problem, the loaded equation, Volterra equation, Green's function

В настоящее время теория краевых задач для уравнений смешанного типа является одним из интенсивно развивающихся разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Одним из важнейших классов уравнений с частными производными являются нагруженные уравнения смешанного типа. Подробная библиография по исследованиям локальных и нелокальных краевых задач для нагруженных уравнений содержится в [10].

Цель исследования: доказать существование и единственность решения нелокальной задачи для нагруженного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками.

Постановка задачи

В области

$$D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < T\}$$

рассматривается нагруженное уравнение третьего порядка с кратными характеристиками

$$U_y = U_{xxx} + a(x, y)U_x + \lambda(y)U(x_0, y). \quad (1)$$

Задача. Найти регулярное в области D решение $U(x, y)$ уравнения (1) из класса $C(\bar{D}) \cap C_{x,y}^{(3,1)}(D)$ с непрерывной вплоть до $x = 1$ производной первого порядка по x, удовлетворяющее условиям:

$$U(x, 0) = \tau(x), \ 0 \le x \le 1, \quad (2)$$

$$U(0, y) = \varphi_1(y), U_x(1, y) = \varphi_2(y), 0 \le y \le T, \quad (3)$$

$$\left[\alpha_1(y)\frac{\partial U}{\partial x} + \beta_1(y)U(x, y)\right]\bigg|_{x=x_0} = \left[\alpha_2(y)\frac{\partial U}{\partial x} + \beta_2(y)U(x, y)\right]\bigg|_{x=1} + \delta(y), \quad 0 \le y \le T, \quad (4)$$

где $\tau(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\alpha_1(y)$, $\alpha_2(y)$, $\beta_1(y)$, $\beta_2(y)$, $\delta(y), \lambda(y)$ – заданные функции, непрерывные *в* замыкании области их определения; x_0 – фиксированная точка интервала $0 < x < 1$, причем $\beta_2(y) \ne 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда $a(x, y) = 0$, тогда уравнение (1) примет вид

$$U_y = U_{xxx} + \lambda(y)U(x_0, y). \quad (5)$$

Пусть существует решение $U(x, y)$ задачи (1) – (4) и

$$U(1, y) = \varphi(y), \ 0 \le y \le T. \quad (6)$$

Из свойств функции Грина $G(x, y; \xi, \eta)$ [6] заключаем, что решение $U(x, y)$ задачи (1) – (3), (6) в области D представимо в виде

$$\pi U(x,y)=\int_0^y G_{\xi\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_1(\eta)\,d\eta-\int_0^y G_{\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_2(\eta)\,d\eta-$$

$$-\int_0^y G_{\xi\xi}(x,y;1,\eta)\varphi(\eta)\,d\eta+\int_0^1 G(x,y;\xi,0)\tau(\xi)\,d\xi-$$

$$-\int_0^y \lambda(\eta)\tilde{G}(x,y;\eta)U(x,\eta)\,d\eta\,, \qquad (7)$$

где $\tilde{G}(x,y;\eta)=\int_0^1 G(x,y;\xi,\eta)\,d\xi$.

Обозначая $U(x_0,y)=\psi(y)$, получаем из (7) интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\pi\psi(y)+\int_0^y \lambda(\eta)\tilde{G}(x_0,y;\eta)\psi(\eta)\,d\eta=\overline{\psi}(y)\,, \qquad (8)$$

которое однозначно разрешимо в классе непрерывных функций, где $\overline{\psi}(y)$ – известная, достаточно гладкая функция.

Таким образом, решение задачи (1) – (3) при выполнении условия (7) имеет вид

$$U(x,y)=\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^y G_{\xi\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_1(\eta)\,d\eta-\int_0^y G_{\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_2(\eta)\,d\eta-\right.$$

$$-\int_0^y G_{\xi\xi}(x,y;1,\eta)\varphi(\eta)\,d\eta+\int_0^1 G(x,y;\xi,0)\tau(\xi)\,d\xi-$$

$$\left.-\int_0^y R(x,y;\xi,\eta)\overline{\psi}(\eta)\,d\eta\right\}, \qquad (9)$$

где $R(x,y;\xi,\eta)$ – резольвента ядра $\lambda(y)\tilde{G}(x_0,y;\eta)$.

Дифференцируя (9) по x, и подставляя $\frac{\partial U}{\partial x}$ в краевое условие (4), после несложных преобразований получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно неизвестной функции $\varphi(y)$:

$$\beta_2(y)\varphi(y)+\int_0^y Q(y,\eta)\varphi(\eta)\,d\eta=g(y)\,, \qquad (10)$$

которое однозначно и безусловно разрешимо, где $Q(y,\eta)$, $g(y)$ – известные достаточно гладкие функции.

По найденному $\varphi(y)$ определяется $U(x,y)$. Таким образом, решение задачи (1) – (4) существует, единственно, и определяется формулой (9).

Пусть теперь $a(x,y)\neq 0$. Опираясь на свойства функции Грина для задачи (1) – (3) и $U(1,y)=\varphi(y)$, будем иметь

$$U(x,y)=\int_0^y d\eta\int_0^1 G(x,y;\xi,\eta)a(\xi,\eta)U_{\xi}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta+$$

$$+\int_0^y U(x_0,\eta)\,d\eta\int_0^1 \lambda(\eta)G(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,. \qquad (11)$$

Из (11) интегрированием по частям, получим

$$U(x,y)+\int_0^y\int_0^1 T(x,y;\xi,\eta)U(\xi,\eta)\,d\xi d\eta=F(x,y)\,, \qquad (12)$$

где $T(x,y;\xi,\eta)=\frac{\partial}{\partial\xi}\left[G(x,y;\xi,\eta)a(\xi,\eta)\right]$,

$$F(x,y)=\int_0^y\left\{a(1,\eta)G(x,y;1,\eta)\varphi(\eta)-a(0,\eta)G(x,y;0,\eta)\varphi_1(\eta)\right\}d\eta+$$

$$+\int_0^y P(x,y;\eta)U(x_0,\eta)d\eta\ .$$

Обращая (12) через резольвенту $R(x,y;\xi,\eta)$ ядра $T(x,y;\xi,\eta)$, будем иметь

$$U(x,y)=\int_0^y\left\{a(1,\eta)G(x,y;1,\eta)\varphi(\eta)-a(0,\eta)G(x,y;0,\eta)\varphi_1(\eta)\right\}d\eta+$$

$$+\int_0^y P(x,y;\eta)U(x_0,\eta)d\eta+\int_0^y\int_0^l R(x,y;\xi,\eta)\times$$

$$\times\left[\int_0^\eta\left\{a(1,\eta_1)G(x,y;1,\eta_1)\varphi(\eta_1)-a(0,\eta_1)G(x,y;0,\eta_1)\varphi_1(\eta_1)\right\}d\eta_1+\right.$$

$$\left.+\int_0^\eta P(x,\eta;\eta_1)U(x_0,\eta_1)d\eta_1\right]d\xi d\eta\ . \qquad (13)$$

После преобразования (13), получим

$$U(x,y)-\int_0^y\tilde{P}(x,y)U(x_0,\eta)d\eta=\int_0^y\tilde{G}(x,y;\eta)\varphi(\eta)d\eta+f(x,y)\ , \qquad (14)$$

где $\tilde{P}(x,\eta)$ и $\tilde{G}(x,y;\eta)$ функции, свойства которых хорошо известны [7]. Полагая в (13) $x=x_0$ и считая правую часть известной, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $U(x_0,y)=\psi(y)$:

$$\psi(y)-\int_0^y\tilde{P}(x_0,y)\psi(\eta)d\eta=\int_0^y\tilde{G}(x_0,y;\eta)\varphi(\eta)d\eta+f(x_0,y)\ ,$$

которое имеет единственное решение [11].

Найденное значение $U(x_0,y)$ подставим в равенство (14). Удовлетворяя его граничному условию (4), снова получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\varphi(\eta)$, которое однозначно разрешимо, т.к. $\beta_2(y)\neq 0$ [7].

Отметим, что нелокальные задачи для уравнения смешанного типа исследовались также в работах [1-5, 8, 9, 12].

Список литературы

1. Абрегов М.Х., Гучаева З.Х. Аналог задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного гиперболо-параболического типа // Успехи современного естествознания. – 2013. – №11. – С.126-129.

2. Водахова В.А. Краевая задача для параболического уравнения с дробными производными в граничных условиях // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Всероссийской научной конференции. – 2004. – Т. 3. – С. 41-43.

3. Водахова В.А., Гучаева З.Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с разрывными коэффициентами // Успехи современного естествознания. – 2013. – №11. – С.136-140.

4. Водахова В.А., Шамеева К.А. Задачи со смещением для системы уравнений первого порядка Лыкова // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2013. – №2(52). – С.3-7.

5. Гучаева З.Х., Бесланеева Л.Ю. Нелокальная задача для вырождающегося гиперболического уравнения с операторами дробного интегро-дифференцирования в краевом условии // Успехи современного естествознания. – 2014. – №3. – С.81-87.

6. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. – Ташкент: ФАН, 1979. – 120 с.

7. Елеев В.А., Кумыкова С.К. Внутреннекраевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2010. – №5. – С. 5-14.

8. Кумыкова С.К. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения $sign y|y|^m u_{xx}+u_{yy}=0$ // Дифференциальные уравнения. – 1976. – Т. 12, №1. – С. 79-88.

9. Кумыкова С.К. Задача с нелокальными условиями на характеристиках для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. 17, №1. – С. 81-90.

10. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. КБНЦ РАН – М.: Наука. – 2012. – 232 с.

11. НахушевА.М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 12. – С. 96–105.

12. Репин О.А., Кумыкова С.К. О задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения. // Вестник Самарского государственного университета. Естественно-научная серия. – 2012. – №9(100). – С. 52–60.