

УДК 519.6

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ РАВНОМЕРНОСТИ И НОВЫХ ЛП_τ-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

Матусов И.Б.

Институт машиноведения РАН, Москва, e-mail: info@imash.ru

В статье исследовано важное свойство равномерности, обеспечивающее равномерность начальных участков многомерных ЛП_τ-последовательностей. Доказано, что существуют такие начальные условия для первых столбцов направляющих матриц, что последовательность точек, построенная по последовательности всех взятых подряд моноциклических операторов, при любой размерности пространства обладает этим свойством. Доказано также, что можно конструировать ЛП_τ-последовательность так, чтобы у направляющих матриц, соответствующих различным координатам ее точек, все угловые определители были равны $1 \pmod{2}$.

Ключевые слова: равномерно распределенная последовательность, моноциклический оператор, направляющая матрица

ON ONE PROPERTY OF UNIFORMITY AND ON NEW LP_τ-SEQUENCES

Matusov J.B.

Mechanical engineering research institute, Moscow, e-mail: info@imash.ru

One important property of uniformity that ensures the uniformity of initial parts of the LP_τ-sequences was investigated. Was proved that there exist such initial conditions for the first column of the direction matrices that the sequence of the points constructed from sequence of all the monocyclic operators taken successively possesses this property for any space dimension. Also was proved that there exist LP_τ-sequences such that corresponding direction matrices have all corner determinants are equal to $1 \pmod{2}$.

Keywords: uniformly distributed sequences, monocyclic operators, direction matrix

Последовательности многомерных точек, могут обладать различными свойствами равномерности [1]. Сложность заключается в том, что для решения практических задач эти свойства должны выполняться уже при сравнительно небольших количествах точек. Только в этом случае данные последовательности могут быть успешно использованы при решении практических задач, относящихся к теории кубатурных формул, в задачах оптимизации, и т.д. С этой целью в [2] были сформулированы некоторые дополнительные требования к равномерно распределенным последовательностям, а также новые условия [1], обеспечивающие, как это показано в данной работе, существование ЛП_τ-последовательностей.

Свойство А. Рассмотрим K^n – единичный n -мерный куб. Разобьем K^n плоскостями $x_j = I/2$ при $j=1, 2, \dots, n$ на $t=2^n$ октантов, которые будем считать двоичными параллелепипедами. Разобьем последовательность точек $P_i, i=1, \dots$ на двоичные участки, длина которых равна 2^n : $P_0, P_{t-1}, P_t, \dots, P_{2t-1}, P_{2t}, \dots, P_{3t-1}, \dots$. Если в любом из этих участков все точки принадлежат различным октантам, то мы говорим, что последовательность обладает свойством А.

Согласно [2] справедлива теорема: ЛП_τ-последовательность $P_0, P_1, \dots, P_p, \dots$ обладает свойством А тогда и только тогда,

когда определитель (размером $n \times n$), составленный из первых столбцов всех направляющих матриц, равен $1 \pmod{2}$. Данная теорема дает возможность строить ЛП_τ-последовательности со свойством А. Однако остается открытым вопрос: можно ли в качестве последовательности моноциклических операторов $\{L_k\}$ [1], по которым рассчитываются значения соответствующих координат точек ЛП_τ последовательности, брать все операторы низших порядков. Вопрос обоснован тем, что именно в этом случае значение t будет минимальным, что наилучшим образом отразится на всех характеристиках равномерности. Для ответа на него рассмотрим следующие утверждения.

Пусть $L_1, L_2, \dots, L_n$ – различные моноциклические операторы с порядками $m_1, m_2, \dots, m_n$ соответственно.

Лемма 1. Пусть $p(I)$ – есть ДР – последовательности [1], соответствующие всем моноциклическим операторам низших порядков $L_1, \dots, L_n$. Пусть m – порядок оператора L_n . Тогда справедливо следующее неравенство:

$$n + \frac{m(m+1)}{2} < 2^m \quad \text{при } m \geq 5 \quad (1.1)$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по m . При $m=5$ неравенство справедливо, т.к. максимальное n при этом равно 13 [2]. Пусть для некоторого m имеет

место (1.1) при любом n , соответствующем данному m . Докажем, что при любом n , соответствующем $m+I$, будет выполняться аналогичное неравенство. Учтя, что число моноциклических операторов порядка $m+I$ равно $\frac{\varphi(2^m-1)}{m+1}$, (где $j(k)$ – теоретико-числовая функция Эйлера, равная количеству натуральных чисел меньших k и взаимно простых с k) докажем, что

$$n + \frac{\varphi(2^m-1)}{m+1} + \frac{(m+1)(m+2)}{2} < 2^{m+1}.$$

$$\varphi(2^{m+1}-1) + (m+1)^2 < 2^{m+1} - 1 + (m+1)^2 < (m+1)2^m.$$

Окончательно имеем

$$(m+1)^2 - 1 < (m-1)2^m,$$

т.е. приходим к очевидному неравенству, которое справедливо при $m \geq 3$.

Пусть $m(n)$ – порядок моноциклического оператора, стоящего на n -м месте в последовательности всех моноциклических операторов, взятых подряд.

Лемма 2. Рассмотрим $n-I$ последовательность элементов $\text{GF}(2)$ $\{u_i^{(k)}\}$, $k=1, \dots, n-1$, $I=0,1,2, \dots$. Пусть к данному набору принадлежит последовательность, состоящая из единиц, и пусть определитель

$$\begin{vmatrix} u_1^{(1)} & \dots & u_{n-1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)} & \dots & u_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix} = 1 \pmod{2}.$$

Рассмотрим моноциклический оператор L_n порядка $m \geq m(n)$, $m \geq 5$. Тогда существует такое решение оператора $L_n - \{u_i^{(n)}\}$, что определитель

$$\begin{vmatrix} u_1^{(1)} & \dots & u_{n-1}^{(1)} & u_n^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)} & \dots & u_{n-1}^{(n-1)} & u_n^{(n-1)} \\ 1 & \dots & u_{n-1}^{(n)} & u_n^{(n)} \end{vmatrix} = 1 \pmod{2} \quad (1.2)$$

Доказательство. Допустим обратное: как-бы ни выбирать первые m значений решения оператора L_n определитель (1.2) равен $0 \pmod{2}$. Т.к. столбцы предыдущего определителя линейно независимы, то первые $n-I$ элементы последнего столбца в (1.2) единственным образом выразятся через эти столбцы. Но в силу указанного предположения, последний элемент n -го столбца в (1.2)

Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$n + \frac{\varphi(2^{m+1}-1)}{m+1} + \frac{(m+1)m}{2} + m+1 < 2^m + 2^m.$$

Сравнив его с (1.1), остается показать, что

$$\frac{\varphi(2^{m+1}-1)}{m+1} + m+1 < 2^m,$$

т.е. $\varphi(2^{m+1}-1) + (m+1)^2 < (m+1)2^m$. Очевидно, что

должен таким же образом выражаться через элементы n -й строки, принадлежащие соответствующим столбцам в (1.2), при любом выборе первых m значений последней строки. Т.е. для последней строки имеем

$$u_n^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} c_k u_k^{(n)} \quad c_k \in \{0,1\} \quad \text{или} \quad (1.3)$$

$$u_{i_0}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1-i_0} c_{i_0+k} u_{i_0+k}^{(n)} + u_n^{(n)}, \quad c_{i_0} = 1, \\ (c_I = 0 \text{ при } I < I_0)$$

при произвольных, начинающихся с единицы, первых m значениях этой строки. Это означает, что любое решение моноциклического оператора L_n является решением линейного разностного оператора порядка $n-I_0$

$$L^*(u_i) = u_i + \sum_{k=1}^{n-1-i_0} c_{i+k} u_{i+k} + u_{i+n-i_0}.$$

Действительно, пусть $\{u_i^{(n)}\}$ – решение моноциклического оператора L_n . Если в качестве последней строки в (1.2) взять любой участок этого решения, начинающийся с I , то получим (1.3). Возьмем произвольный участок длины n , начинающийся с нуля. Его, в силу того, что первые m значений можно выбирать произвольно, представим в виде суммы двух участков той же длины, начинающихся с I . А т.к. для этих участков выполняется (1.3), то (1.3) справедливо и для данного участка, начинающегося с 0. Т.е. при любых начальных значениях $u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \dots, u_m^{(n)}$ выполняется (1.3). А это и означает, что всякое решение моноциклического оператора L_n порядка m , является решением линейного разностного оператора $L^*(u_i)$. Раз это так, то многочлен,

соответствующий $L^*(u_i)$ должен делиться на многочлен, соответствующий оператору L_n . Пусть

$$x^{n-i_0} + a_{n-i_0-1}x^{n-i_0-1} + \dots + a_1x + 1 \quad (1.4)$$

многочлен над полем GF(2), соответствующий оператору L^* . Покажем, что если многочлен, соответствующий L_n ,

$$x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + 1 \quad (1.5)$$

является делителем многочлена (1.4), то он будет делителем некоторого многочлена большей степени, у которого нет в качестве слагаемых одночленов вида x^k , где $k \leq m$, за исключением I .

Пусть (1.4) содержит в качестве слагаемого некоторый одночлен x^k , где $k \leq m$ (т.е. $a_k = I$).

Умножая (1.4) на $x^k + I$, получим многочлен степени $n - I_0 + k$, у которого коэффициент при x^k , т.е. $a_k = 0$. Аналогично можно поступить с любым слагаемым степени не большей m . Получим многочлен, у которого степень предпоследнего члена больше m ,

а максимальная степень самого многочлена равна $\frac{n-i_0+m(m+1)}{2}$, т.е.

$$x^{\frac{n-i_0+m(m+1)}{2}} + \dots + a_{m+1}x^{m+1} + 1. \quad (1.6)$$

Если многочлен (1.5) делит (1.4), то он должен делить и многочлен (1.6). С другой стороны (1.6), как и многочлен (1.4), содержит четное число слагаемых, т.к. по условию этой леммы одна из строк (1.2) состоит из единиц. Поэтому (1.6) можно представить в виде суммы двучленов ($P > 0$)

$$\left(x^{\frac{n-i_0+m(m+1)}{2}} + 1 \right) + \dots + (x^{m+p} + 1) \quad (1.7)$$

Разделим каждый из этих двучленов на (1.5). Т.к. (1.5) соответствует моноциклическому оператору L_n порядка m , то, согласно [1], является делителем двучлена $(x^{2m-1} + I)$, но не является делителем никакого двучлена $x^s + 1$, где $s < 2m - I$. Но в силу леммы 1 степень многочлена (1.6) меньше $2m - I$. Поэтому, разделив почленно (1.7) на (1.5), получим

$$(x^m + \dots + a_1x + 1)(x^{p_1} + \dots + x^{p_1-c_1}) + x^{k_1} + \dots + 1 + \dots + (x^m + \dots + a_1x + 1)(x^{p_k} + \dots + x^{p_k-c_k}) + x^{k_k} + \dots + 1 = (x^m + \dots + a_1x + 1)(x^c + \dots + x^d) + x_k + \dots + 1,$$

где $k_i < m$, $k < m$. Остаток от деления, $x^k + \dots + 1 \neq 0 \pmod{2}$, т.к. при делении каждого из двучленов (1.7) на (1.5) остаток содержит 1. Двучленов – нечетное число, поэтому суммарный остаток также содержит 1. Таким образом, многочлен (1.6) не делится на многочлен (1.5). Противоречие.

Теорема 1. Существуют такие начальные условия для первых столбцов направляющих матриц, что последовательность точек $P_i = (P^1(I), \dots, P^n(I))$, построенная по последовательности всех взятых подряд моноциклических операторов, при каждом n обладает свойством А.

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. Легко проверить, что теорема справедлива до $n = 7$ ($m(8) = 5$). Пусть она справедлива при некотором $n > 7$. Но это означает, что выполняются условия леммы 2. И если рассмотреть любой моноциклический оператор L_{n+1} , порядок которого такой же, как у L_n или на единицу больше, то в силу леммы 2, у решения этого оператора найдется начинающийся с I участок длины $n+I$, такой что

$$\begin{vmatrix} 1u_2^{(1)} & \dots & u_n^{(1)} & u_{n+1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1u_2^{(n)} & \dots & u_n^{(n)} & u_{n+1}^{(n)} \\ 1u_2^{(n+1)} & \dots & u_n^{(n+1)} & u_{n+1}^{(n+1)} \end{vmatrix} = 1 \pmod{2} \quad (1.8)$$

При этом все угловые определители (1.8) равны $1 \pmod{2}$. Как следует из [2], это доказывает справедливость теоремы при $n+I$. Теорема доказана.

Построение новых ЛП_τ-последовательностей. В [1] приводится следующий результат. Если в качестве матрицы направляющих числителей взять такую, у которой все угловые определители равны $1 \pmod{2}$, то определенная этой матрицей ДР – последовательность будет ЛП₀-последовательностью.

Возникает вопрос нельзя ли из таких последовательностей, определяющих значения различных координат многомерных точек, построить ЛП_τ-последовательность? Приводимые ниже результаты дают воз-

$$\begin{pmatrix} V_{11}^{(11)} & \dots & V_{1\mu_1}^{(1l_1)} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ V_{m_1 1}^{(11)} & \dots & V_{m_1 \mu_1}^{(1l_1)} & & & \\ & & & V_{11}^{(11)} & \dots & V_{1\mu_1 - m_1} \\ & 0 & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & V_{v-m_1 1}^{(11)} & \dots & V_{v-m_1 \mu_1 - m_1}^{(1d_1)} \end{pmatrix} \begin{matrix} W_{ij} \\ \\ \\ L_1 w_{ij} \end{matrix}. \quad (2.4)$$

В верхнем углу, согласно условию теоремы, находится невырожденная матрица. Нетрудно видеть, что столбцы $V_{ij}^{(1k)}$, $k \leq d_1, j \leq \mu_1 - m_1$, являющиеся участками решений оператора L_1 , линейно независимы. Если $\rho_1 > 1$, то в нижней части

матрицы (2.4) повторяем то же преобразование ρ_1 раз. Если $\mu_1' > 0$, то после этих преобразований останутся μ_1' столбцов с элементами $V_{ij}^{(1l')}$. Перенесем их в конец матрицы. Получим следующую матрицу

$$\begin{pmatrix} B_1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & B_1 & & & & & & & & \\ & & & \overline{V_{11}^{(21)}} & \dots & \overline{V_{1\mu_2}^{(2k)_2}} & \dots & \overline{V_{11}^{(n1)}} & \dots & \overline{V_{1\mu_n}^{(nk_n)}} & V_{11}^{(11)} & \dots & V_{1\mu_1}^{(1l')} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Согласно лемме 2, $\overline{V_{11}^{(pk_p)}}$, $2 \leq p \leq n$, есть участки решений оператора $L_p^{k_p}$.

В силу этой леммы, столбцы $\overline{V_{ij}^{(21)}}$, $1 \leq j \leq m_2$, образуют матрицу

$$B = \begin{pmatrix} \overline{V_{11}^{(21)}} & \dots & \overline{V_{1m_2}^{(21)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{V_{m_2 1}^{(21)}} & \dots & \overline{V_{m_2 m_2}^{(21)}} \end{pmatrix},$$

определитель которой равен 1. Посредством L_2 с нижней частью матрицы (2.5) (расположенной под B_1) проделаем преобразования, анало-

гичные предыдущим. Оставшиеся μ_2' столбцов перенесем в конец матрицы. Проделав такие же преобразования со всеми L_p , получим матрицу

$$\begin{pmatrix} B_1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & B_1 & & & & & & & & \\ & & & B_2 & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & B_2 & & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & B_n & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & B_n & \\ & & & & & & & & & & V_{11}^{(11)} & \dots & V_{1\mu_1}^{(11)} & \dots & V_{11}^{(n1)} & \dots & V_{1\mu_n}^{(n1)} \\ & & & & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & & & & V_{v1}^{(11)} & \dots & V_{v\mu_1}^{(11)} & \dots & V_{v1}^{(n1)} & \dots & V_{v\mu_n}^{(n1)} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Здесь $v' = \mu'_1 + \dots + \mu'_n + \tau$ и элементы остаточной матрицы

$$V_{ij}^{(k1)} = L \dots L_{k-1}^{\rho_{k-1}} L_{k+1}^{\rho_{k+1}} \dots L L_n^{\rho_n} V_{ij}^{(k1)}. \quad (2.7)$$

Если бы все ρ_k были равны 0, то исходная матрица уже имела бы вид (2.6).

$$v' = \sum_{k=1}^m (m_k - 1) + \sum_{f=1}^s \mu'_f \geq \sum_{f=1}^s (m_f + \mu'_f - 1) \geq \sum_{f=1}^s m_f.$$

Поэтому из леммы 7 параграфа 3 [1] следует, что все столбцы остаточной матрицы линейно независимы, т.е., что ее ранг равен $\mu'_1 + \dots + \mu'_n$. А ранг всей матрицы равен $v - \tau$. Теорема доказана.

Ввиду того, что в (2.7) $j \leq \mu'_k < m_k$, то $L_k V_{ij}^{(k1)} = 0$. Значит, столбцы остаточной матрицы – это участки решений моноциклических уравнений. Пусть среди μ'_k всего s чисел, отличных от нуля. Обозначим их через μ'_f , $1 \leq f \leq s \leq n$. Все решения $V_{ij}^{(k1)}$, соответствующие одному f , линейно независимы в силу леммы 2.

Список литературы

1. Соболев И.М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. – М.: Наука, 1969. – С. 288.
2. Соболев И.М. Точки, равномерно заполняющие многомерный куб. – М.: Знание, 1985. – С. 125.