УДК 517.946

ВНУТРЕННЕКРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Кумыкова С.К., Матуева Р.А.

ФГБОУ ВПО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова», Нальчик, e-mail: proporwiz@yandex.ru

Исследован вопрос однозначной разрешимости задачи с дробными производными в краевом условии для уравнения смешанного типа второго порядка. При ограничениях неравенственного типа на известные функции и различных порядках операторов дробного дифференцирования в краевом условии доказана теорема единственности. Существование решения доказывается путем редукции к уравнению Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого заключается из единственности решения задачи.

Ключевые слова: внутреннекраевая задача, оператор дробного дифференцирования, оператор дробного интегрирования, уравнение Фредгольма, задача Коши

INSIDE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR MIXED TYPE EQUATION OF THE SECOND ORDER

Kumykova S.K., Matueva R.A.

FGBOU VPO «Kabardin-Balkar state university n.a. K.M. Berbekov», Nalchik, e-mail: proporwiz@yandex.ru

We investigated a boundary value problem with operator fractional differentiation in boundary condition for mixed type equation of the second order. At restrictions of inequality type on the known functions and different fractional differentiation operator in boundary condition the uniqueness theorem was proved. Existence of the solution is proved by way to reductions to the second sort Fredgolm's equation, unconditional solubility of which follows from uniqueness of the solution of the problem.

Keywords: inside boundary value problem, operator of fractional differentiation, operator of fractional integration, Fredholm equation, Cauchy probiem

Теория краевых задач для уравнений смешанного типа, в силу теоретической и прикладной важности, является одним из интенсивно развивающихся разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Многие математические модели тепло- и массообмена в средах, окруженных пористой средой, сводятся к краевым задачам для уравнений смешанного типа. Смешанные гиперболо–параболические уравнения лежат в основе математических моделей различных природных явлений. Локальные и нелокальные краевые задачи для таких уравнений встречаются в теории распространения электромагнитных полей, при изучении математических моделей, описывающих влияние растительного покрова на теплообменные процессы в почве и приземном воздухе, при котором возникает необходимость исследования задачи для двух уравнений

Цель исследования: доказать однозначную разрешимость внутреннекраевой задачи с операторами дробного дифференцирования для уравнения смешанного типа второго порядка.

Постановка задачи. Рассматривается уравнение

$$0=\begin{cases} U_y - U_{xx}, & y>0 \\ (-y)^m U_{xx} - U_{yy} + a(-y)^{\frac{m}{2}-1} U_x, & y<0, \end{cases} \quad (1)$$

где $a \neq 0$ – вещественная постоянная, $m \geq 2$, в конечной области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых x=1, x=1, y=1 соответственно, лежащих в полуплоскости y>0, и характеристиками

$$AC: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0,$$

$$BC: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

уравнения (1) в полуплоскости y<0. Пусть $\Omega_1 = \Omega \cap (y>0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (y<0)$, $J \equiv (0,1)$ – интервал прямой y=0.

Задача. Найти регулярное в области Ω при $y \neq 0$ решение $U(x,y)$ уравнения (1), непрерывное в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющее условиям

$$U\big|_{AA_0} = \phi_1(y),\ U\big|_{BB_0} = \varphi_2(y), \quad (2)$$

$$A(x)D_{0x}^{p}\delta(x)U\left[\theta_0(x)\right]+B(x)D_{x1}^{q}\omega(x)U\left[\theta_1(x)\right]+ \\ +C(x)U_y(x,0)+D(x)U(x,0)=\gamma(x), \tag{3}$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$, $\delta(x)$, $\omega(x)$, $\gamma(x)$ – заданные непрерывные функции, причем $A^2(x)+B^2(x)+C^2(x)+D^2(x)\neq 0$, $\varphi_i(y)\in C(\overline{J})$, $i=1,2$; $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$, $\gamma(x)\in C^1(\overline{J})\cap C^2(J)$, $\theta_0(x)$, $\theta_1(x)$ – точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,0)$, с характеристиками AC, DC соответственно, D_{ax}^{α} – операторы дробного в смысле Римана – Лиувилля интегро-дифференцирования [11].

Единственность решения задачи. При $|a|<m/2$ решение задачи Коши $U(x,0)=\tau(x)$, $U_y(x,0)=\nu(x)$, в области Ω_2 имеет вид [1, 10]

$$U(x,y)=\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}y\cdot\int_0^1\nu\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right]t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}\,dt+ \\ +\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}\cdot\int_0^1\tau\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right]t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}\,dt, \tag{4}$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма функция Эйлера [3].

Вычислим

$$U\left[\Theta_0(x)\right]=U[\frac{x}{2},-(\frac{m+2}{4}x)^{\frac{2}{m+2}}]=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)}x^{1-\alpha-\beta}D_{0x}^{-\alpha}x^{\beta-1}\tau(x) \\ -\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}D^{-\alpha}\nu(x),$$

$$U\left[\Theta_1(x)\right]=u[\frac{1+x}{2},-(\frac{m+2}{4}(1-x))^{\frac{2}{m+2}}]=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}(1-x)^{1-\alpha-\beta}D_{x1}^{-\beta}(1-x)^{\alpha-1}\tau(x)- \\ -\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}D_{x1}^{\alpha-1}(1-x)^{-\beta}\nu(x),$$

где $\alpha=\dfrac{m-2a}{2(m+2)}$, $\beta=\dfrac{m+2a}{2(m+2)}$.

Пусть

$$p=\alpha,\quad q=\beta,\quad \delta(x)=x^{\alpha+\beta-1},\quad \omega(x)=(1-x)^{\alpha+\beta-1}. \tag{5}$$

Подставив $U\left[\theta_0(x)\right]$, $U\left(\theta_1(x)\right)$ в (3), после преобразований получим соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из Ω_2 на J

$$\tau(x)=-A_1(x)D_{0x}^{\alpha+\beta-1}\nu(x)-B_1(x)D_{x1}^{\alpha+\beta-1}\nu(x)-C_1(x)\nu(x)+\gamma_1(x), \tag{6}$$

где $$A_1(x)=\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}\cdot\frac{A(x)\cdot x^{\beta-1}}{E(x)}$$

$$B_1(x)=\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}\cdot\frac{B(x)\cdot(1-x)^{\alpha-1}}{E(x)},$$

$$C_1(x)=\frac{-C(x)}{E(x)},\qquad \gamma_1(x)=\frac{\gamma(x)}{E(x)},$$

$$E(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)}A(x)\cdot x^{\beta-1}+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}B(x)(1-x)^{\alpha-1}+D(x)\neq 0\cdot \tag{7}$$

Если выполняются условия

$$p=1-\beta,\quad q=1-\alpha,\quad \omega(x)=\delta(x)=1, \tag{8}$$

то функциональное соотношение из гиперболической части Ω_2 на J имеет вид

$$\nu(x)=A_2(x)D_{0x}^{1-\alpha-\beta}\tau(x)+B_2(x)D_{x1}^{1-\alpha-\beta}\tau(x)+D_2(x)\tau(x)+\gamma_2(x), \tag{9}$$

где $A_2(x)=\dfrac{-\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)}\dfrac{A(x)x^{-\alpha}}{E_1(x)}$;

$$B_2(x)=\frac{-\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}\frac{B(x)(1-x)^{-\beta}}{E_1(x)};$$

$$D_2(x)=\frac{-D(x)}{E_1(x)};\qquad \gamma_2(x)=\frac{\gamma(x)}{E_1(x)},$$

$$\mathring{A}_1(x)=\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}A(x)\cdot x^{-\alpha}+\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}B(x)(1-x)^{-\beta}+C(x)\neq 0\cdot \tag{10}$$

Теорема единственности. В области Ω не может существовать более одного решения задачи (1) – (3), если выполняется либо (5) и (7),

$$A(x)/B(x)\geq 0,\ D(x)/A(x)\geq 0,\ D(x)/B(x)\geq 0,\ C(x)\leq 0,$$

$$\left[A(x)/B(x)\right]'\leq 0,\ \left[D(x)/A(x)\right]'\geq 0,\ \left[D(x)/B(x)\right]'\leq 0, \tag{11}$$

либо (8) и (10),

$$B(x)/A(x)\geq 0,\ C(x)/A(x)\geq 0,\ C(x)/B(x)\geq 0,\ D(x)\geq 0,$$

$$\left[B(x)/A(x)\right]'\geq 0,\ \left[C(x)/A(x)\right]'\geq 0,\ \left[C(x)/B(x)\right]'\leq 0. \tag{12}$$

Докажем, что при выполнении условий (5), (7), (11) теоремы решение задачи единственно. Для этого докажем, что интеграл $J^*=\int_0^1\tau(x)\nu(x)dx$ не может быть отрицательным.

В самом деле, при $\gamma(x)=0$ уравнение (6) примет вид

$$\tau(x)=A_1(x)D_{0x}^{\alpha+\beta-1}\nu(x)+B_1(x)D_{x1}^{\alpha+\beta-1}\nu(x)+C_1(x)\nu(x).$$

Отсюда $J^*=\int_0^1\tau(x)\nu(x)dx=\int_0^1 A_1(x)\nu(x)D_{0x}^{\alpha+\beta-1}\nu(x)dx+\int_0^1 B_1(x)\nu(x)D_{x1}^{\alpha+\beta-1}\nu(x)dx+$

$$+\int_0^1 C_1(x)\nu(x)\nu(x)\,dx.$$

Используя методику, применявшуюся в работах [2, 5-9] получим следующее равенство

$$2\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}\pi\times J_1^* = -\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{\alpha+\beta-1}dt\int_0^1 A_1'(x)\times$$

$$\times\left[\left(\int_x^1 \nu(\xi)\cos t\xi\,d\xi\right)^2+\left(\int_x^1 \nu(\xi)\sin t\xi\,d\xi\right)^2\right]'dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{\alpha+\beta-1}dt\int_0^1 B_1'(x)\left[\left(\int_x^1 \nu(\xi)\cos t\xi\,d\xi\right)^2+\left(\int_x^1 \nu(\xi)\sin t\xi\,d\xi\right)^2\right]dx+$$

$$+\int_0^1 C_1(x)\nu^2(x)\,dx.$$

Таким образом, при выполнении условий (5), (7), (11) теоремы $J^*\geq 0$.

С другой стороны, переходя в уравнении (1) к пределу при $y\to+0$, получаем

$$\tau''(x)-\nu(x)=0. \qquad (13)$$

Из (13) имеем

$$J^*=\int_0^1\tau(x)\nu(x)\,dx=\int_0^1\tau(x)\tau''(x)\,dx.$$

Интегрируя по частям при выполнении однородных граничных условий $\tau(0)=\tau(1)=0$, будем иметь

$$J^*=\int_0^1\tau(x)\nu(x)\,dx=\int_0^1\tau(x)\tau''(x)\,dx=\tau(x)\cdot\tau'(x)\Big|_0^1-\int_0^1\left[\tau'(x)\right]^2dx=-\int_0^1\left[\tau'(x)\right]^2dx\leq 0.$$

Отсюда заключаем, что $J^*=0$. И, следовательно,

$$\int_0^\infty t^{\alpha+\beta-1}dt\left(\int_0^1\nu(\xi)\cos t\xi\,d\xi\right)^2=0,\ \int_0^\infty t^{\alpha+\beta-1}dt\left(\int_0^1\nu(\xi)\sin t\xi\,d\xi\right)^2=0.$$

Так как $t^{\alpha+\beta-1}\geq 0$, то $\int_0^1\nu(\xi)\cos t\xi\,d\xi=0$, $\int_0^1\nu(\xi)\sin t\xi\,d\xi=0$

для всех $t\in[0,\infty)$, в частности, при $t=2\pi k,\quad k=0,1,2,\ldots$. При этих значениях t функции $\sin t\xi$ и $\cos t\xi$ образуют полную ортогональную систему функций в L^2. Следовательно, $\nu(\xi)=0$ почти всюду, а так как $\nu(x)$ непрерывна по условию, то $\nu(\xi)=0$ всюду. Отсюда легко видеть, что $\nu(x)=0$ и из (6) при $\gamma(x)=0$ следует, что $\tau(x)=0$. Следовательно, $U(x,y)\equiv 0$ в Ω_2 как решение задачи Коши с нулевыми данными, а в Ω_1 $U(x,y)=0$ как решение первой краевой задачи с нулевыми данными.

Таким образом, при выполнении условий (5), (7), (11) теоремы решение задачи единственно. При выполнении условий (8), (10), (12) теоремы единственность решения задачи доказывается аналогично.

Существование решения задачи. При выполнении условий $\tau(0)=\varphi_1(0)$, $\tau(1)=\varphi_2(0)$ интегрируя дважды (13) из Ω_1 получим

$$\tau(x)=\varphi_1(0)+\left[\varphi_2(0)-\varphi_1(0)\right]\cdot x-x\int_0^1(1-\xi)\nu(\xi)\,d\xi+\int_0^x(x-\xi)\nu(\xi)\,d\xi. \qquad (14)$$

Пусть выполняются условия (5). Исключая $\tau(x)$ из (14) и (6) вопрос разрешимости задачи (1) – (3) эквивалентно редуцируется к вопросу разрешимости интегрального уравнения

$$C_1(x)\nu(x)+\int_0^1\frac{K_1(x,\xi)\nu(\xi)\,d\xi}{|x-\xi|^{\alpha+\beta}}=f_1(x), \qquad (15)$$

где $f_1(x)=\varphi_1(0)+\left[\varphi_2(0)-\varphi_1(0)\right]x-\gamma_1(x)$,

$$K_1(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{A_1(x)}{\Gamma(1-\alpha-\beta)}-(x-\xi)^{1+\alpha+\beta}+x(1-\xi)(x-\xi)^{\alpha+\beta}, & \text{при } \xi\le x,\\[2ex] \dfrac{B_1(x)}{\Gamma(1-\alpha-\beta)}+x(1-\xi)(\xi-x)^{\alpha+\beta}, & \text{при } \xi\ge x,\end{cases}$$

$$K_1(x,\xi)\in C\left(\bar J\times\bar J\right)\cap C^1\left(J\times J\right),\quad f_1(x)\in C^1\left(\bar J\right)\cap C^2\left(J\right).$$

При $C_1(x)\neq 0$ уравнение (15) есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода, однозначная и безусловная разрешимость которого заключается из единственности решения задачи. По найденному $\nu(x)$ определяется $\tau(x)$ из (6). Решение задачи (1) – (3) в области Ω_2 выписывается как решение задачи Коши, а в области Ω_1 как решение первой краевой задачи [4]. При выполнения условий (8) теоремы существование решения задачи устанавливается также путем редукции к уравнению Фредгольма второго рода.

Список литературы

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 488 с.

2. Елеев В.А., Кумыкова С.К. Внутреннекраевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2010. – № 5. – С. 5–14.

3. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.: Физматгиз, 1963. – 358 с.

4. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.

5. Репин О.А., Кумыкова С.К. О задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 9 (100). – С. 52-60.

6. Репин О.А., Кумыкова С.К. О задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2013. № 1 (30). С. 150 – 158.

7. Репин О.А., Кумыкова С.К. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа, порядок которого вырождается вдоль линии изменения типа // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. – № 8. С. 57 – 65.

8. Репин О.А., Кумыкова С.К. Внутреннекраевая задача с операторами Сайго для уравнения Геллерстедта // Дифференциальные уравнения. 2013. Т.49, № 10. С. 1340 – 1349.

9. Репин О.А., Кумыкова С.К. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения смешанного типа в неограниченной области // Дифференциальные уравнения. 2012. Т.48, № 8. – С. 1140–1149.

10. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970. – 304 с.

11. Hardy G., Littlwood J. Some properties of fractional integrals // Math. Zs. – 1928. – v. 27, № 4, p. 37 – 41.