

УДК 517.956

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ

Гучаева З.Х., Бесланеева Л.Ю.

ФГБОУ ВПО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова»,
Нальчик, e-mail: proporz@yandex.ru

Для вырождающегося гиперболического уравнения исследован вопрос о существовании решения не-локальной задачи при различных значениях порядков операторов дробного интегро – дифференцирования в краевом условии.

Ключевые слова: краевая задача, оператор дробного интегрирования, оператор дробного дифференцирования, задача Коши, уравнение Вольтерра

A NONLOCAL PROBLEM FOR DEGENERATE HYPERBOLIC EQUATION WITH OPERATORS FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIATION IN THE BOUNDARY CONDITION

Guchaeva Z.K., Beslaneeva L.U.

FGBOU VPO «Kabardin-Balkar state university n.a. K.M. Berbekov», Nalchik,
e-mail: proporz@yandex.ru

The paper is devoted to the study of a nonlocal problem for degenerate hyperbolic equation. At restrictions on the known functions and different orders of fractional integro – differentiation operators proved existence and uniqueness of the solution.

Keywords: a boundary value problem, operator of fractional differentiation, operator of fractional integration, Volterra equation, Cauchy problem

Многие важные проблемы динамики плазмы, теории тепло- и массо – обмена в капиллярно-пористых средах, а также теории околосвуковых течений идеального газа и жидкости сводятся к локальным и нелокальным краевым задачам для гиперболического и смешанного типов уравнений, когда носителями граничных условий являются части характеристических кривых. Анализ литературы по гиперболическим уравнениям переноса влаги в пористых средах показал, что наиболее адекватными реальной ситуации моделями являются математические модели, в основе которых лежит уравнение А.В. Лыкова с младшим членом, учитывающим движение почвенной влаги под действием гравитационных сил

$$y^2 U_{xx} - U_{yy} + a U_x = 0.$$

Это уравнение предложено А.В. Бицадзе [1] как пример уравнения, для которого при $|a| \leq 1$ корректна по Адамару задача Коши, несмотря на нарушение известного условия Геллерстедта, а А.М. Нахушевым [5] как пример уравнения, для которого при $|a| = 1$ задача Дарбу не является корректной и характеристики не являются равно-

правными как носителя граничных данных. Вследствии прикладной важности возникла необходимость исследования нелокальных задач для уравнения А.В. Лыкова.

Цель: исследовать вопросы разрешимости нелокальной задачи с операторами дробного интегро-дифференцирования в краевом условии произвольного порядка и выяснить эффект влияния коэффициента при младшей производной на существование и единственность решения задачи.

Постановка задачи. Рассматривается уравнение влагопереноса Бицадзе – Лыкова

$$y^2 u_{xx} - u_{yy} + a u_x = 0, \quad (1)$$

где a – действительная постоянная, причем $|a| \leq 1$, в характеристическом треугольнике D , ограниченном характеристиками

$$AC : x^2 - \frac{1}{2} y^2 = 0, BC : x^2 + \frac{1}{2} y^2 = 1$$

уравнения (1) и отрезком $\bar{j} = [0, 1]$ прямой $y = 0$.

Задача. Найти регулярное в области D решение $u(x, y)$ уравнения (1) из класса $C(\bar{D}) \cap C^1(D \cup \bar{j})$, удовлетворяющее крайним условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), \forall x \in \bar{j}, \quad (2)$$

$$A(x) D_{ox}^\alpha U[\theta_0(x)] + B(x) D_{x1}^\beta U[\theta_1(x)] = C(x), \forall x \in J, \quad (3)$$

где $\tau(x), A(x), B(x), C(x)$ – заданные непрерывные функции, причем $A^2(x) + B^2(x) \neq 0$, $\theta_0(x), \theta_1(x)$ – точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0) \in I$ с характеристиками AC, BC соответственно; α, β – постоянные, D_{ax}^l – операторы дробного в смысле Римана – Лиувилля интегро – дифференцирования, определяемые по формулам [12]

$$D_{ax}^l f = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-l)} \int_0^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1+l}}, l < 0 \\ \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} D_{ax}^{l-(n+1)} f(x), l > 0 \end{cases}$$

$$D_{x1}^l f \equiv \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-l)} \int_x^1 \frac{f(t) dt}{(t-x)^{1+l}}, l < 0 \\ -\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} D_{x1}^{l-(n+1)} f(x), l > 0. \end{cases}$$

Задача (1)-(3) относится к классу краевых задач со смещением А.М. Нахушева [5]. Для обобщенного уравнения Трикоми задача (2)-(3) была исследована Оразовым И. [11] для различных интервалов изменения постоянных α, β . Нелокальные задачи со смещением для вырождающихся гиперболических и смешанного типов уравнений исследовались также в работах [2-5]–[7-11].

Доказательство существования решения задачи. Известно [1], что решение задачи Коши для уравнения (1) в области Δ при $|a| < 1$ представимо в виде

$$U(x, y) = c_1 \int_0^1 \tau \left[x + \frac{y^2}{2} (1-2t) \right] (1-t)^{\frac{a-3}{4}} t^{\frac{a+3}{4}} dt + \\ + c_2 y \int_0^1 v \left[x + \frac{y^2}{2} (1-2t) \right] (1-t)^{\frac{a-1}{4}} t^{\frac{a+1}{4}} dt, \quad (4)$$

$$\text{где } c_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)}, c_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)}, \tau(x) = U(x, 0), v(x) = U_y(x, 0).$$

Удовлетворив (4) краевому условию (3), после преобразований получим уравнение

$$c_2 \Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right) A(x) D_{0x}^{\alpha+\frac{a-3}{4}} x^{\frac{a-1}{4}} v(x) + \\ + c_2 \Gamma\left(\frac{a+3}{4}\right) B(x) D_{x1}^{\beta-\frac{a+1}{4}} (1-x)^{\frac{a+1}{4}} v(x) = \gamma(x), \quad (5)$$

где

$$\gamma(x) = C(x) - c_1 \Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right) A(x) D_{0x}^{\alpha} x^{1/2} D_{0x}^{\frac{a-1}{4}} x^{\frac{a-3}{4}} \tau(x) - \\ - c_1 \Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right) B(x) D_{x1}^{\beta} (1-x)^{1/2} D_{x1}^{\frac{a-1}{4}} (1-x)^{\frac{a+3}{4}} \tau(x).$$

Теорема. Если

$$\alpha = \frac{3-a}{4}, \frac{3+a}{4} + k < \beta < \frac{3+a}{4} + k + 1, k = 0, 1, \dots \quad (6)$$

и выполнены условия

$$\tau(x) = (1-x)^{\sigma} \tau_1(x), \tau_1(x) \in C^{k+3}(\bar{I}) \cap C^{k+4}(I), \sigma \geq \beta, \quad (7)$$

$$A(x) = x^{\frac{1-a}{4}} (1-x)^k a_1(x),$$

$$\text{где } k=0,1: a_1(x), B(x), C(x) \in C(\bar{I}) \cap C^1(I), \quad (8)$$

причем $a_1(x)B(x) \neq 0, \forall x \in \bar{I}$,

$$v(x) = (1-x)^{\beta-3/2} v_1(x), v_1(x) \in C^k(\bar{I}), v_1(1) = 0 \quad (9)$$

то задача (1)-(3) имеет более одного решения.

При выполнении условий (6) теоремы уравнение (5) примет вид

$$\begin{aligned} & c_2 \Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right) A(x) x^{\frac{a-1}{4}} v(x) + \\ & + c_2 \Gamma\left(\frac{a+3}{4}\right) B(x) D_{x1}^{\beta-\frac{a+1}{4}} (1-x)^{-\frac{a+1}{4}} v(x) = \gamma(x), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma(x) = & C(x) - c_1 \Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right) A(x) D_{0x}^{\frac{3-a}{4}} x^{1/2} D_{0x}^{\frac{a-1}{4}} x^{\frac{a-3}{4}} \tau(x) - \\ & - c_1 \Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right) B(x) D_{x1}^{\beta} (1-x)^{1/2} D_{x1}^{\frac{a-1}{4}} (1-x)^{-\frac{a+3}{4}} \tau(x). \end{aligned}$$

В случае, когда $B(x) = 0, a_1(x) \neq 0$ из (10) можно определить

с помощью вычислений можно заключить, что правая часть $\gamma(x)$ уравнения (10) представима в виде

$$v(x) = \frac{\gamma(x)}{c_2 \Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right) (1-x)^k a_1(x)}, \quad \gamma(x) = x^{\frac{a-3}{4}} \gamma_1(x),$$

где $k=0,1,\dots$, т.е. решение задачи (1)-(3) существует и единственно.

где $\gamma_1(x) \in C(\bar{I}) \cap C(I^2)$.

Краткости ради исследуем вопрос разрешимости уравнения (10) при $k=0$ и $k=1$. С учетом свойств операторов дробного интегрирования после соответ-

При выполнении условий (8) теоремы вопрос разрешимости задачи при $k=0$ эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости следующего интегро-дифференциального уравнения относительно $v(x)$:

$$a_1(x)v(x) - b_1(x) \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{(1-t)^{-\frac{a+1}{4}} v(t) dt}{(t-x)^{\beta-\frac{a+3}{4}}} = \frac{\gamma(x)}{c_2 \Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)}, \quad (11)$$

$$\text{где } b_1(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{a+3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right) \Gamma\left(1+\frac{a+3}{4}-\beta\right)} B(x).$$

В этом случае справедливо неравенство $0 < \beta - \frac{a+3}{4} < 1$. Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее (11)

$$a_1(x)v(x) - b_1(x) \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{(1-t)^{-\frac{a+1}{4}} v(t) dt}{(t-x)^{\beta-\frac{a+3}{4}}} = 0. \quad (12)$$

Введем новую неизвестную функцию

интегрального уравнения Абеля

$$\varphi(x) = \int_x^1 \frac{(1-t)^{\frac{a+1}{4}} v(t) dt}{(t-x)^{\beta-\frac{a+3}{4}}} \quad (13)$$

$$\int_x^1 \frac{f(t) dt}{(t-x)^\mu} = F(x),$$

и, применяя формулу обращения

$$f(x) = -\frac{\sin \mu \pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{F(t) dt}{(t-x)^{1-\mu}}$$

где $0 < \mu < 1$. К (13), в результате получим уравнение

$$v(x) = -\frac{\sin \pi \left(\beta - \frac{a+3}{4} \right)}{\pi} (1-x)^{\frac{a+1}{4}} \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{\varphi(t) dt}{(t-x)^{1-\beta+\frac{a+3}{4}}}.$$

Подставляя последнее в (12) будем иметь

$$\begin{aligned} b_1(x) \frac{d}{dx} \varphi(x) + \frac{\sin \pi \left(\beta - \frac{a+3}{4} \right)}{\pi} a_1(x) (1-x)^{\frac{a+1}{4}} \times \\ \times \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{\varphi(t) dt}{(t-x)^{1-\beta+\frac{a+3}{4}}} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Если обозначить

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx} \varphi(x), \quad (15)$$

то с учетом равенства $\varphi(1)=C^*$, будем иметь

$$\varphi(x) = C^* - \int_x^1 \Psi(t) dt. \quad (16)$$

Подставляя (15), (16) в (14), получим при $b_1(x) \neq 0$, что однородная задача (1)-(3), при $k=0$ эквивалентно в смысле разрешимости уравнению Вольтерра 2-го рода

$$\Psi(x) + \int_x^1 \frac{K(x, \beta) \Psi(t) dt}{(t-x)^{1-\beta+\frac{a+3}{4}}} = (1-x)^{\beta-3/2} \gamma_1(x) \quad (17)$$

$$\text{где } K(x, \beta) = \frac{\sin \pi \left(\beta - \frac{a+3}{4} \right)}{\pi} \frac{a_1(x)}{b_1(x)} (1-x)^{\frac{a+1}{4}}, \quad \gamma_1(x) = \frac{-C^* \sin \pi \left(\beta - \frac{a+3}{4} \right)}{\pi} \frac{a_1(x)}{b_1(x)}.$$

Методом последовательных приближений можно показать, что уравнение (17) имеет нетривиальное решение в классе функций

$$\Psi(x) = (1-x)^{\beta-3/2} \Psi_1(x),$$

где $\Psi_1(x) \in C(\bar{I}) \cap C^1(I)$.

Таким образом, при $k=0$ решение задачи (1)-(3) неединственно.

Докажем теперь существование решения задачи (1)-(3) в случае $k \neq 0$. Уравнение (11) в результате введения функции $\varphi(x)$, а затем и $\Psi(x)$ по формулам (13), (15) принимает вид

$$\Psi(x) + \int_x^1 \frac{K(x, \beta) \Psi(t) dt}{(t-x)^{1-\beta+\frac{a+3}{4}}} = f(x), \quad (18)$$

где

$$f(x) = (1-x)^{\beta-3/2} \gamma_1(x) + \frac{\gamma(x)}{b(x)} \frac{1}{c_2 \Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)}.$$

С учетом гладкости известных функций правая часть уравнения (18) представима в виде

$$f(x) = (1-x)^{\beta-3/2} x^{\frac{a-3}{4}} f^*(x),$$

где $f^*(x) \in C(\bar{I}) \cap C^1(I)$.

В этом классе функций уравнение (18) имеет нетривиальное решение $\Psi(x)$. По найденному $\Psi(x)$ определяется $\phi(x)$, а затем $v(x)$. Таким образом, задача разрешима и ее решение задается формулой (4).

Исследуем теперь вопрос разрешимости задачи (1)-(3) при $k=1$. В этом случае

выполняется неравенство $1 < \beta - \frac{3+a}{4} < 2$. И уравнение (10) при выполнении условий теоремы имеет вид

$$(1-x)a_1(x)v(x) - \frac{b_1(x)}{1 + \frac{a+3}{4} - \beta} \frac{d^2}{dx^2} \times \int_x^1 \frac{(1-t)^{-\frac{a+1}{4}} v(t) dt}{(t-x)^{\beta - \frac{a+3}{4} - 1}} = \frac{\gamma(x)}{c_2 \Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)}. \quad (19)$$

Покажем, что однородное уравнение, соответствующее (19), имеет нетривиальное решение. В самом деле, рассмотрим уравнение

$$(1-x)a_1(x)v(x) - \frac{b_1(x)}{1 + \frac{a+3}{4} - \beta} \frac{d^2}{dx^2} \int_x^1 \frac{(1-t)^{-\frac{a+1}{4}} v(t) dt}{(t-x)^{\beta - \frac{a+3}{4} - 1}} = 0. \quad (20)$$

Вычислениями, аналогичными случаю $k=0$ уравнение (20) преобразуется к виду:

$$\Psi(x) + \int_x^1 K_2(x,t)\Psi(t) dt = \gamma_2(x), \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_2(x) = & -\left(\beta - \frac{a+3}{4}\right) \left(1 + \frac{a+3}{4} - \beta\right) B\left(\beta - 1 - \frac{a+3}{4}, 2\right) \times \\ & \times \frac{c_1^*}{\pi} \sin \pi \left(\beta - \frac{a+3}{4} - 1\right) \frac{(1-x)^{\beta-1/2}}{b_1(x)} a_1(x) \\ K_2(x,t) = & \frac{\sin \pi \left(\beta - \frac{a+3}{4} - 1\right)}{\pi} \frac{a_1(x)}{b_1(x)} \times \\ & \times (1-x)^{\frac{a+1}{4}} (\xi-x)^{\beta - \frac{a+3}{4} - 1} \left(1 + \frac{a+3}{4} - \beta\right) \times \\ & \times \left[(\xi-x) \left[\frac{\Gamma\left(\beta - \frac{a+3}{4}\right)}{\Gamma\left(\beta - \frac{a+3}{4} + 1\right)} - \left(\beta - 1 - \frac{a+3}{4}\right) B\left(\beta - 1 - \frac{a+3}{4}, 2\right) \right] - \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \frac{\Gamma\left(\beta - \frac{a+3}{4} - 1\right)}{\Gamma\left(\beta - \frac{a+3}{4}\right)} (1-x) \right\}.$$

Уравнение (21) есть интегральное уравнение Вольтера второго рода с непрерывной правой частью $\gamma_2(x) \in C(\bar{I})$ и непрерывным ядром $K_1(x, t) \in C(\bar{I} \times \bar{I})$ и, следовательно, оно имеет единственное непрерывное на $\bar{I}$ решение $\Psi(x)$, определяемое формулой

$$\Psi(x) = \gamma_2(x) + \int_x^1 R(x, t, \beta) \gamma_2(t) dt,$$

где $R(x, t, \beta)$ – резольвента ядра $K_1(x, t)$. Таким образом, неединственность решения задачи при $k=1$ доказана.

Установим существование решения задачи при $k=1$. С учетом ранее введенных обозначений и проведенных преобразований уравнение (19) примет вид

$$\Psi(x) = \int_x^1 k_2(x, t) \Psi(t) dt = f_1(x), \quad (22)$$

где

$$f_1(x) = \gamma_2(x) + \frac{\gamma(x)}{c_2 \Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right) b_1(x)}.$$

На основании ранее приведенных исследований заключаем, что правая часть (22) представима в виде

$$f_1(x) = x^{\frac{a-3}{4}} f_2(x),$$

где $f_2(x) \in C(I) \cap C^1(I)$. В этом классе функции уравнение (22) имеет нетривиальное решение $\Psi(x)$. По найденному $\Psi(x)$ можно определить $p(x)$. Следовательно, при

$k=1$ задача (1)-(3) разрешима и ее решение задается формулой (4)

По найденному $v(x)$ решение $u(x, y)$ задачи (1) – (3) в области D определяется по формуле (4).

Список литературы

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. Елеев В.А., Кумыкова С.К. О некоторых краевых задачах со смещением на характеристиках для смешанного уравнения гипербола- параболического типа // Украинский математический журнал. 2000. Т.52. С. 707 – 716.
3. Карасев И.М., Кумыкова С.К. К вопросу интегрирования в K' дифференциальных уравнений с обобщенным оператором Чебышева // Дифференциальные уравнения. 1972. Т.8. № 11. С. 2080-2081.
4. Кумыкова С.К. О некоторых краевых задачах со смещением для уравнения Лаврентьева – Бицадзе // Дифференциальные уравнения. 1973. Т.9. № 1. С. 106 – 114.
5. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
6. Оразов И. Об одной краевой задаче со смещением для обобщенного уравнения Трикоми // Дифференц. уравнения. 1981. Т.17. № 2- С. 5 -17.
7. Репин О.А., Кумыкова С.К. О задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Вестник Самарского государственного университета. Естественная серия. 2012. № 9(100). с. 52 – 60.
8. Репин О.А., Кумыкова С.К. О задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико – математические науки» № 1 (30) – 2013. С. 150 – 158.
9. Репин О.А., Кумыкова С.К. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа, порядок которого вырождается вдоль линии изменения типа // Известия высших учебных заведений. 2013. № 8. С. 57 – 65.
10. Репин О.А., Кумыкова С.К. Внутреннекраевая задача с операторами Сайго для уравнения Геллерстедта // Дифференциальные уравнения. 2013. Т.49. № 10. С. 1340 – 1349.
11. Репин О.А., Кумыкова С.К. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения смешанного типа в неограниченной области // Дифференциальные уравнения. 2012. Т.48. № 8. С. 1140 – 1149.
12. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.