УДК 681.3

КРУПНОМАСШТАБНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХААРА

Кравченко Д.А., Гапочкин А.В., Калмыков М.И.

ФГАОУ ВПО «Северо-кавказский федеральный университет», Ставрополь, e-mail: kia762@yandex.ru

Для организации цифровой обработки сигналов, как правило, используются дискретное преобразование Фурье (ДПФ) и его быстрые алгоритмы. Однако данный математический аппарат не всегда позволяет обеспечить максимальные требования, предъявляемые к анализу сигналов. Использование ДПФ и быстрого преобразования Фурье (БПФ) в условиях, когда сигналы имеют определенные локальные особенности, то полученные спектральные составляющие слабо отражают эти особенности. Решить данную проблему за счет проведения крупномасштабной обработки с использованием вейвлет-преобразования. В работе рассмотрены примеры применения вейвлет преобразования Хаара.

Ключевые слова: крупномасштабная обработка сигналов, вейвлеты, преобразование Хаара, базисные функции Хаара

LARGE SCALE PROCESSING SIGNALS BASED ON HAAR TRANSFORM

Kravchenko D.A., Gapochkin A.V., Kalmykov M.I.

Federal state Autonomous educational institution higher professional education «North-caucasian federal university, Stavropol, e-mail: kia762@yandex.ru

For the organization of digital signal processing, usually used the discrete Fourier transform (DFT) and its fast algorithms. However, this mathematical formalism is not always possible to ensure the maximum requirements for signal analysis. Using DFT and fast Fourier transform (FFT) in an environment where signals have certain local features, the resulting spectral components weakly reflect those characteristics. To solve this problem by carrying out a large-scale processing using wavelet transformation. The paper discusses examples of Haar wavelet transformation.

Keywords: large-scale signal processing, wavelets transform Haar Haar basis functions

Известно, что классическое дискретное преобразование Фурье (ДПФ) и его быстрые алгоритмы, выступают в качестве традиционного математического аппарата, который используется для анализа стационарных процессов. С практической точки зрения, в основу которой положено точное представление произвольных сигналов, ДПФ и быстрое преобразование Фурье (БПФ) имеют ряд недостатков. Устранить данные недостатки можно за счет перехода к крупномасштабной обработке сигналов с использованием вейвлет-преобразований.

Основная часть. При этом для обеспечения реального масштаба времени при построении вычислительных устройств цифровой обработки сигналов (ЦОС) во многом применялись специализированные процессоры (СП). Так в работах [1, 2] предлагается использовать в качестве математического аппарата цифровой обработки сигналов алгебраические структуры, обладающие свойством кольца и поля. Применение модулярных кодов системы остаточных классов (СОК) позволяет осуществлять параллельные вычисления по основаниям, в качестве которых используются взаимно простые числа.

Наряду с системой остаточных классов для организации ортогональных преобразований сигналов используются и другие непозиционные системы. В работах [3–8] приведены примеры применения полиномиальной системы классов вычетов (ПСКВ) в цифровой обработке сигналов. Эти коды позволяют эффективно осуществлять обработку данных в реальном масштабе времени за счет перехода от одномерной обработки сигналов к многомерной. Кроме этого коды ПСКВ эффективно реализуют алгоритмы, которые содержат операции сложения, вычитания и умножение. Следует отметить, что наряду с алгоритмами цифровой обработки сигналов, полиномиальная система классов вычетов нашли применение и в высокоскоростных системах шифрования потока данных [9].

Однако, отмеченные выше преобразования сигналов на основе ДПФ и его быстрых алгоритмов, имеют ряд недостатков. Данные преобразования имеют хорошую локализацию по частоте, при этом временное разрешение желает быть значительно лучше. Использование ДПФ и быстрого преобразования Фурье (БПФ) не учитывает ситуацию, когда частота колебаний может изменяться во времени. Отмеченных недостатков лишен математический аппарат крупномасштабной обработки сигналов вейвлет-преобразования [10].

Одним из наиболее используемых вейвлет-преобразований является преобразова-

ние Хаара. Данное преобразование является разделимым и может быть представлено в виде матриц

$$\mathbf{T} = \mathbf{HFH}^T, \qquad (1)$$

где **F** – матрица сигнала; **H** – матрица преобразования; **T** – результат преобразования сигнала.

Матрица преобразования Хаара включает в свой состав базисные функции Хаара $h_k(z)$.Отмеченные выше функции будут определяться на непрерывном замкнутом интервале $z \in [0, 1]$. Значение переменной k находятся в пределе от 0 до $N-1$, где $N = 2^n$. При этом для каждого индекса k, определяется пара значений p и q, для которых справедливо,

$$0 \le p \le n-1, \qquad (2)$$

так чтобы выполнялось условие

$$k = 2^p + q - 1. \qquad (3)$$

Значение индекса выбирается следующим образом

$$q = \begin{cases} 0,1 & \text{при } p = 0 \\ 1 \le q \le 2^p & \text{при } p \ne 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Пусть $N = 4$. Определим значения индексов k, p и q. Так как значение $n = 2$, то согласно (2) параметр p принимает значения 0 и 1.

При $k = 0$ индексы принимают значения $p = 0$ и $q = 0$.

При $k = 1$ индексы принимают значения $p = 0$ и $q = 1$.

При $k = 2$ воспользуемся выражениями (3) и (4). Тогда индекс $p = 1$. Затем на основании (4) определяем, что значение может быть $q = 1$ или $q = 2$. Чтобы вычислить значение индекса q применяем условие (3). Получаем $q = 1$.

Поступаем аналогичным образом для вычисления индексов p и q для $k = 3$. В этом случае имеем $q = 2$.

Полученные значения индексов p и q позволяют осуществлять вычисление базисные функции Хаара. При $k=0$ получаем базисную функцию

$$h_0(z) = h_{00}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}}, \qquad (5)$$

где $z \in [0, 1]$.

Остальные базисные функции задаются выражением

$$h_k(z) = h_{pq}(z) = \frac{2^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{N}} \begin{cases} 1 & \text{при } \dfrac{q-1}{2^p} \le z < \dfrac{q-0,5}{2^p} \\ -1 & \text{при } \dfrac{q-0,5}{2^p} \le z < \dfrac{q}{2^p} \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}, \qquad (6)$$

где $z \in [0, 1]$.

Произведем расчет базисных функций Хаара с использованием (5) и (6) для $N = 4$. Согласно (5) получаем значения

$$h_0(z) = h_{00}(z) = \frac{1}{\sqrt{4}}[1, 1, 1, 1].$$

При $k = 1$ индексы принимают значения $p = 1$ и $q = 1$. Тогда согласно (6) для значения переменной $z = \{0, 0,25, 0,5, 0,75\}$ имеем

$$h_1(z) = h_{01}(z) = \frac{2^{\frac{0}{2}}}{\sqrt{4}} \begin{cases} 1 & \text{при } \dfrac{1-1}{2^0} \le z < \dfrac{1-0,5}{2^0} \\ -1 & \text{при } \dfrac{1-0,5}{2^0} \le z < \dfrac{1}{2^0} \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

В результате имеем строку матрицы вида

$$h_1(z) = h_{01}(z) = \frac{1}{\sqrt{4}}[1, 1, -1, -1].$$

При $k = 2$ индексы принимают значения $p = 1$ и $q = 1$. Тогда согласно (6) для значения переменной $z = \{0, 0,25, 0,5, 0,75\}$ имеем

$$h_2(z) = h_{11}(z) = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{4}} \begin{cases} 1 & \text{при } \dfrac{1-1}{2^1} \le z < \dfrac{1-0,5}{2^1} \\ -1 & \text{при } \dfrac{1-0,5}{2^1} \le z < \dfrac{1}{2^1} \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

В результате имеем строку матрицы вида

$$h_2(z) = h_{11}(z) = \frac{1}{\sqrt{4}}\left[\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0, 0\right].$$

При $k = 3$ индексы принимают значения $p = 1$ и $q = 2$. Тогда согласно (6) для значения переменной $z = \{0, 0{,}25, 0{,}5, 0{,}75\}$ имеем

$$h_3(z) = h_{12}(z) = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{4}} \begin{cases} 1 & \text{при } \dfrac{2-1}{2^1} \le z < \dfrac{2-0{,}5}{2^1} \\ -1 & \text{при } \dfrac{2-0{,}5}{2^1} \le z < \dfrac{2}{2^1} \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

В результате имеем строку матрицы вида

$$h_3(z) = h_{12}(z) = \frac{1}{\sqrt{4}}\left[0, 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right].$$

Таким образом, матрица преобразования Хаара $\mathbf{H}_4$ имеет вид

$$\mathbf{H}_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Проведем прямое преобразование Хаара для входной последовательности отсчетов сигнала $f(x) = [0, 1, 2, 4]$. Тогда согласно математического аппарата, который связан с крупномасштабной теорией, имеем

$$W_\phi(0,0) = \frac{1}{2}\sum_{x=0}^{3} f(x)\phi_{00}(x) = \frac{1}{2}\left[0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 4\cdot 1\right] = 3{,}5$$

$$W_\psi(0,1) = \frac{1}{2}\sum_{x=0}^{3} f(x)\psi_{01}(x) = \frac{1}{2}\left[0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 4\cdot(-1)\right] = -2{,}5$$

$$W_\psi(1,1) = \frac{1}{2}\sum_{x=0}^{3} f(x)\psi_{11}(x) = \frac{1}{2}\left[0\cdot\sqrt{2} + 1\cdot(-\sqrt{2}) + 2\cdot 0 + 4\cdot 0\right] = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$W_\psi(1,2) = \frac{1}{2}\sum_{x=0}^{3} f(x)\psi_{12}(x) = \frac{1}{2}\left[0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot\sqrt{2} + 4\cdot(-\sqrt{2})\right] = -\sqrt{2}$$

Таким образом, результатом вейвлет-преобразования имеем

$$F(x) = \left[3{,}5, -2{,}5, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right].$$

Для того, чтобы восстановить исходный сигнал, воспользуемся следующей формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{N}}\left[\sum_k W_\phi(j_0 k)\phi_{j_0 k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} W_\psi(j_0 k)\psi_{jk}(x)\right]. \qquad (7)$$

Произведем расчет восстановленных отсчетов исходного сигнала.

$$f_{\text{îáð}}(0) = \frac{1}{\sqrt{N}}\left[W_\phi(00)\phi_{00}(0) + W_\psi(01)\psi_{00}(0) + W_\psi(11)\psi_{11}(0) + W_\psi(12)\psi_{12}(0)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}}\left[3{,}5\cdot 1 + (-2{,}5)\cdot 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2} - \sqrt{2}\cdot 0\right] = 0$$

Аналогично находим первый отсчет восстановленного сигнала

$$f_{\text{îáð}}(1) = \frac{1}{\sqrt{N}}\left[W_\phi(00)\phi_{00}(1) + W_\psi(01)\psi_{00}(1) + W_\psi(11)\psi_{11}(1) + W_\psi(12)\psi_{12}(1)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}}\left[3{,}5\cdot 1 + (-2{,}5)\cdot 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-\sqrt{2}) - \sqrt{2}\cdot 0\right] = 1$$

Второй отсчет восстановленного сигнала находим следующим образом

$$f_{\hat{i}\,\acute{a}\partial}(2)=\frac{1}{\sqrt{N}}\left[W_{\phi}(00)\phi_{00}(2)+W_{\psi}(01)\psi_{00}(2)+W_{\psi}(11)\psi_{11}(2)+W_{\psi}(12)\psi_{12}(2)\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4}}\left[3{,}5\cdot 1+(-2{,}5)\cdot(-1)-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\right]=2$$

Значение третьего отсчета восстановленного сигнала находим следующим образом

$$f_{\hat{i}\,\acute{a}\partial}(3)=\frac{1}{\sqrt{N}}\left[W_{\phi}(00)\phi_{00}(3)+W_{\psi}(01)\psi_{00}(3)+W_{\psi}(11)\psi_{11}(3)+W_{\psi}(12)\psi_{12}(3)\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4}}\left[3{,}5\cdot 1+(-2{,}5)\cdot(-1)-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0-\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2})\right]=4$$

Таким образом, результатом обратного вейвлет-преобразования имеем последовательность вида

$$f_{обр}(x)=\left[0,1,2,4\right].$$

Для выполнения обратного преобразования была использована транспонированная матрица Хаара $\mathbf{H}_4$.

Проведенные исследования показали, что в качестве базовых операций, выполняемых при осуществлении прямого и обратного преобразований Хаара, использовались операции суммирования, вычитания и умножения. Это позволяет использовать коды системы остаточных классов. При построении таких кодов классов вычетов в качестве оснований применяются взаимно простые числа [1,2,10]. Благодаря этому любой позиционный код можно представить в виде набора остатков, полученных при делении этого числа на числа-основания

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\,, \qquad (8)$$

где $\alpha_i \equiv A \bmod p_i$; $i = 1,\ldots,n$.

Рассмотрим выполнение арифметических операций в модулярном непозиционном коде. Представим значения остатков операндов в виде степеней двойки. Пусть для двоичной записи основания p_i, $i = 1,\ldots,n$, потребуется m_i двоичных разрядов. Тогда остаток можно представить

$$\alpha_i=\alpha^i_{m_i-1}2^{m_{i-1}}+\alpha^i_{m_i-2}2^{m_{i-2}}+...+\alpha^i_1 2^1+\alpha_0\,. \quad (9)$$

Соответственно для второго операнда получаем

$$\beta_i=\beta^i_{m_i-1}2^{m_{i-1}}+\beta^i_{m_i-2}2^{m_{i-2}}+...+\beta^i_1 2^1+\beta_0\,. \quad (10)$$

Так как сравнения по одному и тому же модулю можно почленно складывать, то для суммы двух чисел A и B, имеющих соответственно коды (α_1, α_2,…, α_n) и (β_1, β_2,…, β_n) справедливы соотношения:

$$\left|A+B\right|^{+}_{p}=\left(\left|\alpha_1+\beta_1\right|^{+}_{p_1},...,\left|\alpha_n+\beta_n\right|^{+}_{p_n}\right)=$$

$$=\left(\alpha^1_0+\beta^1_0,\sum_i(\alpha^2_{m_2-i}+\beta^2_{m_2-i})2^i,\sum_j(\alpha^3_{m_2-j}+\beta^3_{m_2-j})2^j,...,\sum_w(\alpha^n_{m_2-w}+\beta^n_{m_2-w})2^w\right), \qquad (11)$$

где + – операция суммирования по модулю p.

Аналогично получаем для операции вычитания в СОК

$$\left|A-B\right|^{+}_{p}=\left(\left|\alpha_1-\beta_1\right|^{+}_{p_1},...,\left|\alpha_n-\beta_n\right|^{+}_{p_n}\right)=$$

$$=\left(\alpha^1_0-\beta^1_0,\sum_i(\alpha^2_{m_2-i}-\beta^2_{m_2-i})2^i,\sum_j(\alpha^3_{m_2-j}-\beta^3_{m_2-j})2^j,...,\sum_w(\alpha^n_{m_2-w}-\beta^n_{m_2-w})2^w\right), \qquad (12)$$

Как наглядно видно в равенствах (11) и (12) полученные подмножества образуют циклическую группу сложения по основаниям p_i, $I = 1,\ldots,n$, СОК. При этом каждая группа включает в себя конечное число элементов. Операция сложения и обратная ей – вычитание производятся по модулю p, так как данные подмножества образуют аддитивную циклическую группу.

В силу дистрибутивности операции умножения операндов над кольцом на элементы этого кольца относительно операции сложения имеем

$$\left|A\cdot B\right|_p^+ = \left(\left|\alpha_1\cdot\beta_1\right|_{p_1}^+,\ldots,\left|\alpha_n\cdot\beta_n\right|_{p_n}^+\right) =$$
$$= (\alpha_0^1\beta_0^1, \sum_{l=0}^{2m_2-2} q_{2m_2-2-l}^2 2^{2m_2-2-l};\ldots;\sum_{j=0}^{2m_n-2} q_{2m_n-2-j}^n 2^{2m_n-2-j}), \quad (13)$$

где $q_s^i = \sum_{k=0}^{s}\alpha_k^i\beta_{s-k}^i$ – линейная свертка; s = 0,…, $2m_i - 2$; $i = 0,\ldots,n$.

Таким образом, выполнение операции умножения над операндами в СОК согласно

$$A\cdot B = \left(\sum_{k,l\geq 0} a_k b_l 2^{k+l}\right)\bmod P \quad , \quad (14)$$

сводится к умножению соответствующих остатков по основаниям СОК с последующих суммированием по модулю характеристики поля.

Анализ выражений (11)-(15) показывает, что основным достоинством модулярных непозиционных кодов является сравнительная простота выполнения модульных операций (сложения, вычитания, умножения). Очевидно, что приведенные выше формальные правила выполнения операций в системе остаточных классов позволяют существенно повысить скорость выполнения крупномасштабных преобразований сигнала. При этом использование в качестве основания системы малоразрядные числа позволяет применять вычислительные устройства с заранее просчитанной детерминированной структурой.

Выводы

В работе рассмотрены вопросы применения вейвлет-преобразований для анализа сигнала. В качестве такого преобразования предлагается использовать преобразования Хаара. Приведены примеры прямого преобразования Хаара, а также реализация обратного преобразования. Показана возможность использования системы остаточных классов для реализации вейвлет-преобразования. Применение малоразрядных остатков позволит повысить скорость выполнения данного преобразования сигналов.

Список литературы

1. Червяков Н.И., Сахнюк П.А., Шапошников А.В., Ряднов С.А Модулярные параллельные вычислительные структуры нейросетевых систем / под ред. Н.И. Червякова. – М.: Физматлит., 2003. – 303 с.
2. Червяков Н.И. Обобщенная вычислительная модель модулярного нейропроцессора цифровой обработки сигналов на основе программируемых логических интегральных схем // Нейрокомпьютеры: разработка и применение. – 2006. – № 10. – С. 37–40.
3. Чипига А.Ф., Калмыков И.А. Структура нейронной сети для реализации цифровой обработки сигналов повышенной разрядности // Наука. Инновации. Технологии. – 2004. – Т. 38. – С. 46.
4. Калмыков И.А., Резеньков Д.Н., Горденко Д.В., Саркисов А.Б. Методы и алгоритмы реконфигурации непозиционных вычислительных структур для обеспечения отказоустойчивости спецпроцессоров. – Ставрополь, 2014.
5. Калмыков И.А., Калмыков М.И. Новая технология, повышающая корректирующие способности модулярных кодов // Теория и техника радиосвязи. – 2014. – № 3. – С. 5–12.
6. Калмыков И.А., Калмыков М.И. Структурная организация параллельного спецпроцессора цифровой обработки сигналов, использующего модулярные код // Теория и техника радиосвязи. – 2014. – № 2. – С. 60–66.
7. Калмыков И.А., Саркисов А.Б., Макарова А.В. Технология цифровой обработки сигналов с использованием модулярного полиномиального кода // Известия ЮФУ Технические науки. – 2013. – №. 12 (149). – С. 234–241.
8. Калмыков И.А., Зиновьев А.В., Резеньков Д.Н., Гахов В.Р. Применение систолических ортогональных преобразований в полиномиальной системе классов вычетов для повышения эффективности цифровой обработки сигналов // Инфоком-муникационные технологии. Самара. – 2010. – Т. 8, № 3. – С. 4–11.
9. Калмыков И.А., Стрекалов Ю.А., Щелкунова Ю.О., Кихтенко О.А., Барильская А.В. Технология нелинейного шифрования данных в высокоскоростных сетях связи // Инфокоммуникационные технологии. – 2010. – Т. 8, №2. – С. 14–22
10. Червяков Н.И., Чумаков Д.В., Лавриненко С.В. Нейросетевая реализация дискретных вейвлет-преобразований // Нейрокомпьютеры: разработка и применение. – 2008. – № 1-2. – С. 4–11.