УДК 517. 956

РЕШЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ КРАТНЫХ СУММ

Сергиенко Л.С. , Куницын А.Г.

ГОУ ВПО «Национальный исследовательский Иркутский государственный технический университет», Иркутск, e-mail: lusia_ss@mail.ru

Общее или временное уравнение Шрёдингера является математическим выражением дуального свойства корпускулярно-волновой природы микрочастиц материи и играет фундаментальную роль в нерелятивистской квантовой механике [1] . Если величина потенциальной энергии поля постоянна, то математическая зависимость между количественными характеристиками векторного поля не будет содержать производных по времени, и динамическая модель Шрёдингера станет стационарной. К такому уравнению приходят, например, при исследовании процесса квантования энергии гармонического осциллятора, ротатора со свободной осью, в спектральной теории атомов при изучении движения электронов в кулоновом поле ядра и др. [2]. В представленной работе рассматривается эллиптическое уравнение, являющееся модификацией стационарного уравнения Шрёдингера. Доказывается существование и единственность решения задачи Дирихле в круге для линейного дифференциального уравнения второго порядка с особой точкой в центре области исследования. Основным результатом является построение специальных функций – кратных многочленов треугольного вида, применяемых при вычислении коэффициентов ряда, представляющего решение.

Ключевые слова: уравнение, задача, решение, формула, ряд, многочлен

SOLUTION OF ELLIPTIC EQUATIONS BY MULTIPLE SUMS

Sergienko L.S., Kunitsyn A.G.

National Research Irkutsk State Technical University, Irkutsk, e-mail: lusia_ss@mail.ru

The total or temporary Schrödinger equation is the mathematical expression of the dual properties of the particle-wave nature of matter and microparticles plays a fundamental role in the non-relativistic quantum mechanics [1]. If the value of the potential energy of the field is constant, the mathematical relationship between the quantitative characteristics of the vector field will not contain time derivatives, and the dynamic model of the Schrödinger become stationary. By this equation come, for example, in the study of the process of energy quantization of the harmonic oscillator, the free rotator axis in the spectral theory of atoms in the study of the motion of electrons in the Coulomb field of the nucleus, and others. [2]. In the present paper we consider the elliptic equation is a modification of the stationary Schrödinger equation. We prove the existence and uniqueness of solutions of the Dirichlet problem in the disk for linear second order differential equation with a singular point in the center of the study area. The main result is the construction of special functions – multiple polynomials triangle form, used in calculating the coefficients of the series representing the solution.

Keywords: equation problem solution, the formula row polynomial

Постановка задачи

Рассмотрим стационарное уравнение Шрёдингера с двумя независимыми переменными, которое формально, отвлекаясь от физического смысла аргументов, можно записать в следующем виде [3]

$$u_{xx} + u_{yy} = f\left(x^2 + y^2\right) u.$$

В частных случаях при

$$f = -\left(x^2 + y^2\right)^l, \; l > 0$$

для последнего уравнения найдены корректные постановки краевых задач в определённых условиях [4–5].

В представленной работе исследуется **Задача.** В области

$$D = \left\{ \left(x, y\right) : x^2 + y^2 < R^2 \right\}$$

найти решение уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} - \frac{x^2 + y^2}{R^2 + x^2 + y^2} u = 0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u\big|_{\partial D} = h, \; h \ni C^2\left(\partial D\right). \qquad (2)$$

Замечание 1. В дальнейшем для упрощения выкладок будем считать радиус круга единицей масштаба рассматриваемой системы координат: R=1.

Разделение переменных по методу Фурье

Нетривиальное решение граничной задачи 1 будем искать в полярных координатах в виде

$$u\left(\rho, \varphi\right) = \Phi\left(\varphi\right) \, \Psi\left(\rho\right). \qquad (3)$$

В результате подстановки произведения (3) в уравнение (1) и разделения переменных с постоянной λ получается уравнение для функции

$$\Psi\left(\rho\right) \quad \rho^2 \Psi'' + \rho \Psi' - \left(\frac{\rho^4}{1 + \rho^2} + \lambda\right) \Psi = 0, \qquad (4)$$

и задача на собственные значения для функции

$$\Phi(\varphi)\quad \left.\begin{aligned} \Phi'' + \lambda\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Общее решение однородного линейного уравнения (5) определяется с помощью характеристического уравнения в виде суперпозиции гармоник

$$\Phi(\varphi) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}\varphi\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}\varphi\right).$$

Для того, чтобы Φ была однозначной периодической функцией, должно выполняться

$$A\cos\left(\sqrt{\lambda}\left((\varphi + 2\pi)\right)\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}\left(\varphi + +2\pi\right)\right) =$$
$$= A\cos\left(\sqrt{\lambda}\ \varphi + 2\pi\sqrt{\lambda}\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}\ \varphi + 2\pi\sqrt{\lambda}\right).$$

Выбирая собственные значения $\lambda = \lambda_n = n^2$, получаем

$$\Phi_n(\varphi) = A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi), n = 0;1;2;\dots \qquad (6)$$

При каждом фиксированном n из (4) получаем

$$\rho^2\Psi''_n + \rho\Psi'_n - \left(\frac{\rho^4}{1+\rho^2} + n^2\right)\Psi_n = 0.. \qquad (7)$$

Так как уравнение (7) при любом заданном $n = 0;1;2;\dots$ имеет особую точку при $\rho = 0$, его решение будет иметь вид степенного ряда, начинающегося с ρ^{ε_n} $[6]$:

$$\Psi_n = \rho^{\varepsilon_n}\sum_{i=0}^{\infty} c_{i,n}\rho^i = \rho^{\varepsilon_n}\left(c_{0,n} + c_{1,n}\rho + c_{i,n}\rho^2 + \dots + c_{i,n}\rho^i + \dots\right). \qquad (8)$$

Значения характеристического показателя ε_n и коэффициентов $c_{i,n}$ можно определить подстановкой ряда (8) в уравнение (7). Последовательно приравнивая к нулю коэффициенты при x^{ε}, $x^{\varepsilon+1}, x^{\varepsilon+2}, \dots$ получаем систему следующих уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\varepsilon^2 - n^2\right)c_0 = 0,\\
&\left[(\varepsilon+1)^2 - n^2\right]c_1 = 0,\\
&\left[(\varepsilon+2)^2 - n^2\right]c_2 = 0,\\
&\left[(\varepsilon+3)^2 - n^2\right]c_3 = 0,\\
&\left[(\varepsilon+4)^2 - n^2\right]c_4 = c_0,\\
&\left[(\varepsilon+5)^2 - n^2\right]c_5 = c_1,\\
&\left[(\varepsilon+6)^2 - n^2\right]c_6 = c_2 - c_0,\\
&\left[(\varepsilon+7)^2 - n^2\right]c_7 = c_3 - c_1,\\
&\left[(\varepsilon+8)^2 - n^2\right]c_8 = c_4 - c_2 + c_0,\\
&\left[(\varepsilon+9)^2 - n^2\right]c_9 = c_5 - c_3 + c_1,\\
&\left[(\varepsilon+10)^2 - n^2\right]c_{10} = c_6 - c_4 + c_2 - c_0,\\
&\left[(\varepsilon+11)^2 - n^2\right]c_{11} = c_7 - c_5 + c_3 - c_1,\\
&\left[(\varepsilon+12)^2 - n^2\right]c_{12} = c_8 - c_6 + c_4 - c_2 + c_0,\\
&\left[(\varepsilon+13)^2 - n^2\right]c_{13} = c_9 - c_7 + c_5 - c_3 + c_1,\\
&\dots
\end{aligned}\right\}$$

Считая $c_0 \neq 0$, из первого уравнения находим $\varepsilon = \pm n$. Чтобы найти сингулярное ограниченное при $\rho \to 0$ решение уравнения (7), полагаем $\varepsilon_n = n,\ n = 0;1;2;\dots$. Тогда из последней системы заключаем, что $c_{1,n} = c_{2,n} = c_{3,n} = 0$. В этом случае все последующие нечётные коэффициенты $c_{2i+1,n}, i = 2;3;\dots$ также должны быть равны нулю, а все чётные коэффициенты определятся через сумму предыдущих по альтернативным формулам

$$\left.\begin{aligned} c_{2i,n} &= \frac{c_{2i-4,n} - 4(i-1)(i-1+n)c_{2i-2,n}}{4i(i+n)},\ i = 2;3;\dots,\\ c_{2i,n} &= \sum_{j=0}^{i-2} \frac{(-1)^{i+j} c_{2j,n}}{4i(i+n)},\ i = 2;3;\dots,\\ c_{4+2i,n} &= \sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^{i+j} c_{2j,n}}{4(2+i)(2+i+n)},\ i = 0;1;\dots. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Последовательное применение формулы (9) при $i = 0;1;2;3;\dots$ позволяет получить выражение

$c_{4i,n}$ через $c_{0,n}$: $c_{4,n} = \dfrac{c_{0,n}}{4\cdot 2(2+n)}, c_{6,n} = \dfrac{-c_{0,n}}{4\cdot 3(3+n)}$, $c_{8,n} = \dfrac{c_{0,n}}{4\cdot 4(4+n)}\left[1 + \dfrac{1}{4\cdot 2(2+n)}\right]$,

$$c_{10,n} = \frac{-c_{0,n}}{4\cdot 5(5+n)}\left[1 + \frac{1}{4\cdot 2(2+n)} + \frac{1}{4\cdot 3(3+n)}\right],$$

$$c_{12,n} = \frac{c_{0,n}}{4\cdot 6(6+n)}\left[1 + \frac{1}{4\cdot 2(2+n)} + \frac{1}{4\cdot 3(3+n)} + \frac{1}{4\cdot 4(4+n)} + \frac{1}{4^2\cdot 2\cdot 4(2+n)(4+n)}\right],$$

$$c_{14,n} = \frac{-c_{0,n}}{4\cdot 7(7+n)}\left[1 + \frac{1}{4\cdot 2(2+n)} + \frac{1}{4\cdot 3(3+n)} + \frac{1}{4\cdot 4(4+n)} + \frac{1}{4\cdot 5(5+n)} + \right.$$
$$+ \frac{1}{4^2\cdot 2\cdot 4(2+n)(4+n)} +$$
$$\left. + \frac{1}{4^2\cdot 2\cdot 5(2+n)(5+n)} + \frac{1}{4^2\cdot 3\cdot 5(3+n)(5+n)}\right],$$

$$c_{16,n} = \frac{-c_{0,n}}{4\cdot 8(8+n)}\left[1 + \frac{1}{4\cdot 2(2+n)} + \frac{1}{4\cdot 3(3+n)} + \frac{1}{4\cdot 4(4+n)} + \right.$$
$$+ \frac{1}{4\cdot 5(5+n)} + \frac{1}{4\cdot 6(6+n)} + \frac{1}{4^2\cdot 2\cdot 4(2+n)(4+n)} +$$
$$+ \frac{1}{4^2\cdot 2\cdot 5(2+n)(5+n)} + \frac{1}{4^2\cdot 2\cdot 6(2+n)(6+n)} + \frac{1}{4^2\cdot 3\cdot 5(3+n)(5+n)} +$$

$$+\frac{1}{4^2\cdot 3\cdot 6(3+n)(6+n)}+\frac{1}{4^2\cdot 4\cdot 6(4+n)(6+n)}+\frac{1}{4^3\cdot 2\cdot 4\cdot 6(2+n)(4+n)(6+n)}\Bigg]$$

. . .

При $i=2;3;4;\ldots,\alpha_i=\left[\begin{array}{l} i,\ \text{если i чётное},\\ i-1,\ \text{если i нечётное},\end{array}\right.$ или

$$\alpha_i=i+\frac{(-1)^i-1}{2}\qquad c_{4+2i,n}=\frac{(-1)^i c_{0,n}}{4(i+2)(i+2+m)}\Bigg[1+\frac{1}{4\cdot 2(2+n)}+\frac{1}{4\cdot 3(3+n)}+\frac{1}{4\cdot 4(4+n)}+$$

$$+\frac{1}{4\cdot 5(5+n)}+\frac{1}{4\cdot 6(6+n)}+\frac{1}{4^2\cdot 2\cdot 4(2+n)(4+n)}+\frac{1}{4^2\cdot 2\cdot 5(2+n)(5+n)}+$$

$$+\frac{1}{4^2\cdot 2\cdot 6(2+n)(6+n)}+\frac{1}{4^2\cdot 3\cdot 5(3+n)(5+n)}+\frac{1}{4^2\cdot 3\cdot 6(3+n)(6+n)}+$$

$$+\frac{1}{4^2\cdot 4\cdot 6(4+n)(6+n)}+\frac{1}{4^3\cdot 2\cdot 4\cdot 6(2+n)(4+n)(6+n)}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{4^{\alpha_i/2}i(i-2)(i-4)\ldots\alpha_i(i+n)(i-2+n)(i-4+n)\ldots(\alpha_i+n)}\Bigg].\qquad(10)$$

Обозначим специальные вспомогательные функции

$$P_{i,l}=\sum_{\tau_1=0}^{i-2-2l}\sum_{\tau_2=0}^{\tau_1}\cdots\sum_{\tau_{l+1}=0}^{\tau_l}\prod_{\eta=0}^{l}\frac{1}{(2+2\eta+\tau_{l+1-\eta})(2+2\eta+\tau_{l+1-\eta}+n)}.\qquad(11)$$

Полагая $c_{0,n}=4,$ уравнения системы (10) при $i\geq 2$ можно записать в виде

$$c_{8,n}=\frac{1}{4(4+n)}\left[1+\frac{1}{2^2}P_{2,0}\right],\ c_{10,n}=\frac{-1}{5(5+n)}\left[1+\frac{1}{2^2}P_{3,0}\right],$$

$$c_{12,n}=\frac{1}{6(6+n)}\left[1+\frac{1}{2^2}P_{4,0}+\frac{1}{2^4}P_{4,1}\right],\ \ c_{14,n}=\frac{-1}{7(7+n)}\left[1+\frac{1}{2^2}P_{5,0}+\frac{1}{2^4}P_{5,1}\right],$$

$$c_{16,n}=\frac{1}{8(8+n)}\left[1+\frac{1}{2^2}P_{6,0}+\frac{1}{2^4}P_{6,1}+\frac{1}{2^6}P_{6,2}\right],$$

$$c_{18,n}=\frac{-1}{9(9+n)}\left[1+\frac{1}{2^2}P_{7,0}+\frac{1}{2^4}P_{7,1}+\frac{1}{2^6}P_{7,2}\right]$$

. . .

$$c_{4+2i,n}=\frac{(-1)^i}{(i+2)(i+2+n)}\left[1+\sum_{l=0}^{\frac{\alpha_i-2}{2}}\frac{1}{2^{\alpha(2+2l)}}P_{i,l}\right].\qquad(12)$$

Пример вычисления коэффициентов ряда (8).

По формулам (11) – (12) найти коэффициенты ряда (8): а) $c_{12,n}$ и в) $c_{14,n}$.

Решение. а) $$c_{12,n} = c_{(4+2\cdot 4),n} = \frac{(-1)^4}{(4+2)(4+2+n)}\left[1+\sum_{l=0}^{\frac{\alpha_4-2}{2}}\frac{1}{2^{\alpha(2+2l)}}P_{4,l}\right] =$$

$$= \frac{1}{6(6+n)}\left[1++\sum_{l=0}^{1}\frac{1}{2^{\alpha(2+2l)}}P_{4,l}\right] = \frac{1}{6(6+n)}\left[1+\frac{1}{2^2}P_{4,0}+\frac{1}{2^4}P_{4,1}\right].$$

Найдём значение коэффициента $P_{4,0}$:

$$P_{4,0} = \sum_{\tau_1=0}^{2}\prod_{\eta=0}^{0}\frac{1}{(2+2\eta+\tau_{1-\eta})(2+2\eta+\tau_{1-\eta}+n)} = \sum_{\tau_1=0}^{2}\frac{1}{(2+\tau_1)(2+\tau_1+n)} =>$$

$$P_{4,0} = \frac{1}{2(2+n)}+\frac{1}{3(3+n)}+\frac{1}{4(4+n)}.$$

Определим $P_{4,1} = \sum_{\tau_1=0}^{0}\sum_{\tau_2=0}^{\tau_1}\prod_{\eta=0}^{1}\frac{1}{(2+2\eta+\tau_{2-\eta})(2+2\eta+\tau_{2-\eta}+n)}$.

Так как

$$\prod_{\eta=0}^{1}\frac{1}{(2+2\eta+\tau_{2-\eta})(2+2\eta+\tau_{2-\eta}+n)} = \frac{1}{(2+\tau_2)(2+\tau_2+n)(2+2+\tau_{2-1})(2+2+\tau_{2-1}+n)} =$$

$$= \frac{1}{(2+\tau_2)(2+\tau_2+n)(4+\tau_1)(4+\tau_1+n)},$$

имеем

$$P_{4,1} = \sum_{\tau_1=0}^{0}\sum_{\tau_2=0}^{\tau_1}\frac{1}{(2+\tau_2)(2+\tau_2+n)(4+\tau_1)(4+\tau_1+n)} =$$

$$= \sum_{\tau_2=0}^{0}\frac{1}{(2+\tau_2)(2+\tau_2+n)4(4+n)} = \frac{1}{2(2+n)4(4+n)}.$$

Подставляя $P_{4,0}$ и $P_{4,1}$ в формулу

$$c_{12,n} = \frac{1}{6(6+n)}\left[1+\frac{1}{2^2}P_{4,0}+\frac{1}{2^4}P_{4,1}\right],$$

получим

$$c_{12,n} = \frac{1}{6(6+n)}\left[1+\frac{1}{4\cdot 2(2+n)}+\frac{1}{4\cdot 3(3+n)}+\frac{1}{4\cdot 4(4+n)}+\frac{1}{4^2\cdot 2\cdot 4(2+n)(4+n)}\right].$$

в) $$c_{14,n} = c_{(4+2\cdot 5),n} = \frac{(-1)^5}{(5+2)(5+2+n)}\left[1+\sum_{l=0}^{\frac{\alpha_5-2}{2}}\frac{1}{2^{\alpha(2+2l)}}P_{5,1}\right] = \frac{-1}{7(7+n)}\left[1+\sum_{l=0}^{1}\frac{1}{2^{\alpha(2+2l)}}P_{5,1}\right] =$$

$$= \frac{-1}{7(7+n)}\left[1+\frac{1}{2^{\alpha_2}}P_{5,0}+\frac{1}{2^{\alpha_4}}P_{5,1}\right] = \frac{-1}{7(7+n)}\left[1+\frac{1}{2^2}P_{5,0}+\frac{1}{2^4}P_{5,1}\right],$$

$$\mathrm{P}_{5,0}=\sum_{\tau_1=0}^{3}\prod_{\eta=0}^{0}\frac{1}{\left(2+2\eta+\tau_{1-\eta}\right)\left(2+2\eta+\tau_{1-\eta}+n\right)}=\sum_{\tau_1=0}^{3}\frac{1}{\left(2+\tau_1\right)\left(2+\tau_1+n\right)}=$$

$$=\frac{1}{2(2+n)}+\frac{1}{3(3+n)}+\frac{1}{4(4+n)}+\frac{1}{5(5+\mathrm{n})},$$

$$\mathrm{P}_{5,1}=\sum_{\tau_1=0}^{1}\sum_{\tau_2=0}^{\tau_1}\prod_{\eta=0}^{1}\frac{1}{\left(2+2\eta+\tau_{2-\eta}\right)\left(2+2\eta+\tau_{2-\eta}+\mathrm{n}\right)}.$$

$$\prod_{\eta=0}^{1}\frac{1}{\left(2+2\eta+\tau_{2-\eta}\right)\left(2+2\eta+\tau_{2-\eta}+\mathrm{n}\right)}=\frac{1}{\left(2+\tau_2\right)\left(2+\tau_2+\mathrm{n}\right)\left(4+\tau_1\right)\left(4+\tau_1+\mathrm{n}\right)},$$

$$\mathrm{P}_{5,1}=\sum_{\tau_1=0}^{1}\sum_{\tau_2=0}^{\tau_1}\frac{1}{\left(2+\tau_2\right)\left(2+\tau_2+\mathrm{n}\right)\left(4+\tau_1\right)\left(4+\tau_1+\mathrm{n}\right)}=$$

$$=\sum_{\tau_2=0}^{0}\frac{1}{\left(2+\tau_2\right)\left(2+\tau_2+\mathrm{n}\right)4\left(4+\mathrm{n}\right)}+\sum_{\tau_2=0}^{1}\frac{1}{\left(2+\tau_2\right)\left(2+\tau_2+\mathrm{n}\right)\left(4+1\right)\left(4+1+\mathrm{n}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2(2+\mathrm{n})4(4+\mathrm{n})}+\frac{1}{2(2+\mathrm{n})5(5+\mathrm{n})}+\frac{1}{3(3+\mathrm{n})5(5+\mathrm{n})}.$$

$$\mathrm{c}_{14,\mathrm{n}}=\frac{-1}{7(7+\mathrm{n})}\left[1+\frac{1}{2^2}P_{5,0}+\frac{1}{2^4}P_{5,1}\right]=>$$

$$\mathrm{c}_{14,\mathrm{n}}=\frac{-1}{7(7+\mathrm{n})}\left[1+\frac{1}{4\cdot 2(2+\mathrm{n})}+\frac{1}{4\cdot 3(3+\mathrm{n})}+\frac{1}{4\cdot 4(4+\mathrm{n})}+\frac{1}{4\cdot 5(5+\mathrm{n})}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4^2\cdot 2\cdot 4(2+\mathrm{n})(4+\mathrm{n})}+\frac{1}{4^2\cdot 2\cdot 5(2+\mathrm{n})(5+\mathrm{n})}+\frac{1}{4^2\cdot 3\cdot 5(3+\mathrm{n})(5+\mathrm{n})}\right].$$

Алгоритм вычисления коэффициентов P_{ij}

Для простоты алгоритм вычисления коэффициентов ряда

$$P_{i,l}=\sum_{\tau_1=0}^{i-2-2l}\sum_{\tau_2=0}^{\tau_1}\cdots\sum_{\tau_{l+1}=0}^{\tau_l}\prod_{\eta=0}^{l}\frac{1}{\left(2+2\eta+\tau_{l+1-\eta}\right)\left(2+2\eta+\tau_{l+1-\eta}+n\right)},i\geq 2+2l.$$

рассмотрим на примере составления кратных сумм вида

$$\mathrm{Q}_{i,l}=\sum_{\tau_1=0}^{i-2-2l}\sum_{\tau_2=0}^{\tau_1}\cdots\sum_{\tau_{l+1}=0}^{\tau_l}\prod_{\eta=0}^{l}\left(2+2\eta+\tau_{l+1-\eta}\right),\ i\geq 2+2l,$$

Определим сначала последовательности сумм $Q_{i,l}$ с одинаковым индексом l. При $l=1$ получаем

$$Q_{4,1}=\sum_{\tau_1=0}^{0}\sum_{\tau_2=0}^{\tau_1}\prod_{\eta=0}^{1}\left(2+2\eta+\tau_{2-\eta}\right)=\sum_{\tau_1=0}^{0}\sum_{\tau_2=0}^{\tau_1}\left(2+\tau_2\right)4=\sum_{\tau_2=0}^{0}\left(2+\tau_2\right)4=2\cdot 4,$$

$$Q_{5,1}=\sum_{\tau_1=0}^{1}\sum_{\tau_2=0}^{\tau_1}\prod_{\eta=0}^{1}\left(2+2\eta+\tau_{2-\eta}\right)=\sum_{\tau_1=0}^{1}\sum_{\tau_2=0}^{\tau_1}\left(2+\tau_2\right)\left(2+2+\tau_1\right)=$$

$$=\sum_{\tau_2=0}^{0}(2+\tau_2)(2+2)+\sum_{\tau_2=0}^{1}(2+\tau_2)(2+2+1)=2\cdot4+2\cdot5+3\cdot5,$$

$$Q_{6,1}=\sum_{\tau_1=0}^{2}\sum_{\tau_2=0}^{\tau_1}\prod_{\eta=0}^{1}(2+2\eta+\tau_{2-\eta})=\sum_{\tau_1=0}^{2}\sum_{\tau_2=0}^{\tau_1}(2+\tau_2)(2+2+\tau_1)=$$

$$=\sum_{\tau_2=0}^{0}(2+\tau_2)(2+2)+\sum_{\tau_2=0}^{1}(2+\tau_2)(2+2+1)+\sum_{\tau_2=0}^{2}(2+\tau_2)(2+2+2)=$$

$$=2\cdot4+2\cdot5+3\cdot5+2\cdot6+3\cdot6+4\cdot6,$$

$$Q_{71}=\sum_{\tau_1=0}^{3}\sum_{\tau_2=0}^{\tau_1}\prod_{\eta=0}^{1}(2+2\eta+\tau_{2-\eta})=\sum_{\tau_1=0}^{3}\sum_{\tau_2=0}^{\tau_1}(2+\tau_2)(2+2+\tau_1)=$$

$$=\sum_{\tau_2=0}^{0}(2+\tau_2)4+\sum_{\tau_2=0}^{1}(2+\tau_2)5+\sum_{\tau_2=0}^{2}(2+\tau_2)6+\sum_{\tau_2=0}^{3}(2+\tau_2)7=$$

$$=2\cdot4+2\cdot5+3\cdot5+2\cdot6+3\cdot6+4\cdot6+2\cdot7+3\cdot7+4\cdot7+5\cdot7 \quad \text{и т.д.}$$

Последовательности множителей в слагаемых рассмотренных сумм $Q_{5,1}$, $Q_{6,1}$, Q_{71} можно легко составить с помощью треугольных матриц

$$A_{5,1}=\begin{pmatrix}2\cdot4 & 2\cdot5\\ 0 & 3\cdot5\end{pmatrix},\ A_{6,1}=\begin{pmatrix}2\cdot4 & 2\cdot5 & 2\cdot6\\ 0 & 3\cdot5 & 3\cdot6\\ 0 & 0 & 4\cdot6\end{pmatrix},\ A_{71}=\begin{pmatrix}2\cdot4 & 2\cdot5 & 2\cdot6 & 2\cdot7\\ 0 & 3\cdot5 & 3\cdot6 & 3\cdot7\\ 0 & 0 & 4\cdot6 & 4\cdot7\\ 0 & 0 & 0 & 5\cdot7\end{pmatrix},$$

Так как этим свойством обладают все выражения $Q_{i,l}$, назовём их кратными многочленами треугольного вида, а функции $P_{i,l}(n)$, представляющие их модификацию соответственно кратными суммами треугольного вида.

Решение краевой задачи 1. Объединяя полученные результаты, определим решение задачи (1) – (2) в полярных координатах

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}-\frac{\rho^2}{1+\rho^2}u=0\\ u|_{\rho=1}=h\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

по формуле (3): $u(\rho,\varphi)=\Phi(\varphi)\Psi(\rho)$. Выше было доказано, что после разделения переменных задачи (13) получаем два уравнения, первое из которых $\Phi^{n'}+n\Phi=0$ имеет частные решения (6) $\Phi_n(\varphi)=A_n\cos(n\varphi)+B_n\sin(n\varphi), n=0;1;\ldots,$

При каждом фиксированном n второе уравнение

$$\rho^2\Psi''_n+\rho\Psi'_n-\left(\frac{\rho^4}{1+\rho^2}+n^2\right)\Psi_n=0,$$

имеет частные решения вида (8)

$$\Psi_n=\rho^n\left(4+\frac{1}{2(2+n)}\rho^4-\frac{1}{3(3+n)}\rho^6+\ldots+\sum_{i=2}^{\infty}c_{4+2i,n,}\rho^{4+2i}\right).$$

Коэффициенты степенного ряда (8) определяются по формулам (12)

$$c_{4+2i,n}=\frac{(-1)^i}{(i+2)(i+2+n)}\left[1+\sum_{l=0}^{\frac{\alpha_i-2}{2}}\frac{1}{2^{\alpha_{(2+2l)}}}P_{i,l}\right],\ n=0;1;2;\ldots,$$

в которых

$$\alpha_i = i + \frac{(-1)^i - 1}{2},$$

а кратные многочлены $P_{i,l}$ заданы соотношениями (11)

$$P_{i,l} = \sum_{\tau_1=0}^{i-2-2l} \sum_{\tau_2=0}^{\tau_1} \dots \sum_{\tau_{l+1}=0}^{\tau_l} \prod_{\eta=0}^{l} \frac{1}{(2+2\eta+\tau_{l+1-\eta})(2+2\eta+\tau_{l+1-\eta}+n)}.$$

Подставляя выражения $\Phi_n(\varphi)$ и $\Psi_n(\rho)$ в формулу (3), определяем две системы собственных функций $\{\cos(n\varphi)\Psi_n\}_0^\infty$ и $\{\sin(n\varphi)\Psi_n\}_0^\infty$, которым соответствуют частные решения первого уравнения (13)

$$u_n(\varphi,\rho) = \Psi_n(\rho)[A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)].$$

Суперпозиция всех этих решений

$$u(\varphi,\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(\rho)[A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)] \tag{14}$$

также будет решением этого уравнения. Коэффициенты A_n и B_n определяются из граничного условия (13)

$$u(\varphi,1) = h(\varphi) = \sum_{,n=0}^{\infty} \Psi_n(1)[A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)], \tag{15}$$

если функцию $h \ni C^2(\partial D)$ разложить в абсолютно и равномерно сходящийся тригонометрический ряд Фурье

$$h(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)], \tag{16}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\,dt, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\cos(n\varphi)\,dt, n = 1;2;\dots\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\sin(n\varphi)\,dt, n = 1;2;\dots .$$

Сравнивая ряды (15) и (16), получаем

$$A_0 = \frac{a_0}{2\Psi_0(1)}, A_n = \frac{a_n}{\Psi_n(1)}, B_n = \frac{b_n}{\Psi_n(1)}, n = 1;2;\dots \tag{17}$$

Применимость принципа суперпозиции

Сходимость построенных рядов, возможность их дифференцирования в круге $\bar{D}$, а также непрерывность функции $u(\varphi,\rho)$ на границе этого круга доказываются классическими методами [2, с. 308–310].

С помощью альтернирующего метода Шварца построенное решение может быть продолжено за пределы круга в области более общего вида [1].

Список литературы

1. Математическая физика. Энциклопедия / Гл. ред. Л.Д. Фадеев. – М: Большая Российская энциклопедия, 1998. – 691 С.

2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: учеб. пособие. – М: Наука, 1977. 735 С.

3. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 С.

4. Сергиенко Л.С. Математическое моделирование физико-технических процессов. – Иркутск: Изд-во Ир ГТУ, 2006. – 228 с.

5. Сергиенко Л.С., Баенхаева А. В. О задаче Дирихле для одного класса вырождающихся на оси эллиптических уравнений // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронежской зимней математической школы / Воронежский государственный университет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. – Воронеж: Издательско – полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2011. – 374 с.

6. Сергиенко Л.С., Баенхаева А. В. Первая краевая задача для стационарного уравнения класса Шрёдингера // Вестник Ир ГТУ / научный журнал – Иркутск: Изд-во Ир ГТУ, 2011 – № 10, выпуск 1 (48) -342 с.

7. Sergiyenko L.S., Nesmeyanov A.A. On evolution of stationary processes near the origins of excitation // International journal of applied and fundamental research. – №1, 2012. – 54 c.