

УДК 548.1

ФОРМИРОВАНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ СТРУКТУР НА ОСНОВЕ ИТЕРАЦИОННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И КАНТОРОВА МНОЖЕСТВА ТОЧЕК С ЗАДАНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В 1D-ПРОСТРАНСТВЕ

Иванов В.В.

ФБГОУ ВПО «Южно-Российский государственный технический университет»,
Новочеркасск, e-mail: valivanov11@mail.ru

Обсуждается проблема формирования некоторых фрактальных структур в 1D-пространстве. Представлены результаты сравнительного анализа их фрактальных размерностей и некоторых топологических характеристик.

Ключевые слова: фрактальная структура, фрактальная размерность, итерационная последовательность, канторово множество

FORMING OF THE FRACTAL STRUCTURES BASED ON TO ITERATIVE SUCCESSIVITY AND CANTOR'S MULTITUDE POINTS WITH NECESSARY CHARACTERISTICS IN 1D SPACE

Ivanov V.V.

South-Russian state engineering university, Novocherkassk, e-mail: valivanov11@mail.ru

The problem of forming of some fractal structures in 1D space was discussed. Results of comparative analyses of its fractal dimensions and some topologic characteristics were presented.

Keywords: fractal structure, fractal dimension, iterative successivity, Cantor's multitude

Известны два основных вида последовательностей точек (итерационная последовательность и канторово множество), представители которых в 1D-пространстве обладают свойствами фрактальных структур и имеют размерность меньше единицы [1, 2]. Для формирования других фрактальных структур в 1D-пространстве, связанных соотношениями гомологии, будем использовать методики, описанные в [3-7].

Итерационная последовательность u^k точек может быть получена по итерационному алгоритму, реализующему последовательность отображений A_k начальной точки u_0 с помощью операции итерации $u^{k+1} = A_k u^k$, где показатель итерации $k = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$. При $u_0 = 0,5$ имеем $u^{k+1} = A_k (1/2)^k$, где $A_k = 0,5$ [2].

В общем случае, если $u_0 = n/(n+1)$, то последовательность с начальной точкой $u_0 = 0,5$ можно рассматривать как первый член одномерного гомологического ряда итерационных последовательностей $u_n^k = [n/(n+1)]^k$, где $n = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$. Предельное значение каждой последовательности $\lim u_n^k = (1 - 2u_n) = (3n+1)/(n+1)$. В этом случае их фрактальные размерности определяются следующим образом: $\text{Dim}(u_n^k) = \ln(n+1)/\ln(3n+1) < 1$. В более общем случае можно рассматривать двумерные гомологические ряды итерационных последовательностей точек вида

$u_{nm}^k = [n/(n+m)]^k$, для которых $\text{Dim}(u_{nm}^k) = \ln(n+m)/\ln(3n+m)$, где $m = 1, 2, 3, \dots, \infty$.

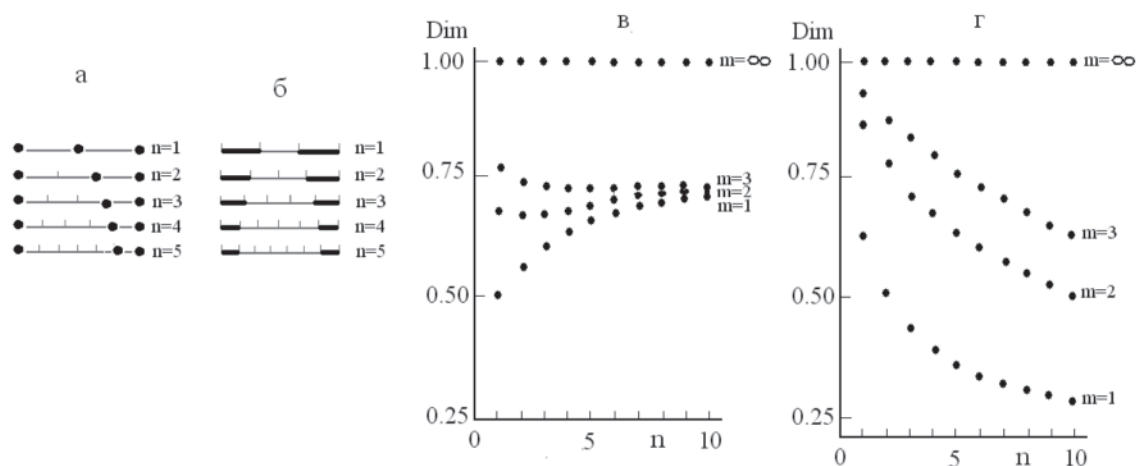
Канторово множество – совершенное множество точек на отрезке $[0,1]$ прямой, которое может быть получено путем последовательного и неограниченного удаления средней трети отрезка $[0,1]$, затем – средних третей отрезков $[0,1/3]$ и $[2/3,1]$ и т.д. Данное множество – результат бесконечного итерирования интервалов вида $V^k = (1/3)^k$. Генератор фрактальной структуры $C(1/3)\{1-\}$, фрактальная размерность канторова множества равна 0,6309.

В общем случае данная фрактальная структура может быть первым членом одномерного гомологического ряда структур с генераторами вида $C(n/n+2)\{1-\}$, где $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$. Фрактальные размерности этих структур $\text{Dim } C(n/n+2) = \ln 2/\ln(n+2)$. В более общем случае можно рассматривать генераторы $C(n/n+2m)\{1-\}$ фрактальных структур, которые образуют двумерный гомологический ряд вида $V_{nm}^k = (n/(n+2m))^k$, где $m = 1, 2, 3, \dots, \infty$. Размерности данных фрактальных структур определяются по формуле $\text{Dim } C(n/n+2m) = \ln 2m/\ln(n+2m) < 1$.

Некоторые генераторы возможных фрактальных структур $I(n/(n+1))\{0+\}$ и $C(n/(n+2))\{1-\}$ в 1D-пространстве для представителей первых пяти одномерных гомологических рядов последовательностей точек

u_{n1}^k и канторовых множеств v_{n1}^k изображены на рисунке (а и б). На этом рисунке представлены закономерности изменения фракталь-

ной размерности u_{nm}^k (в) и v_{nm}^k (г) при некоторых фиксированных значениях параметра m от порядкового номера n в рядах структур.



Генераторы фрактальных структур $I(n/(n+1))\{0+\}$ (а) и $C(n/(n+2))\{1-\}$ (б).
Изменение фрактальной размерности итерационных последовательностей точек u_{nm}^k (в) и канторовых множеств v_{nm}^k (г) от порядкового номера n в гомологических рядах структур $I(n/(n+m))\{0+\}$ (а) и $C(n/(n+2m))\{1-\}$, соответственно

Очевидно, что для каждого фиксированного n при $m \rightarrow \infty$ размерности всех анализируемых видов фрактальных структур монотонно приближаются к 1. Формально при бесконечно больших значениях параметра m эти фрактальные структуры представляют собой квазикompактное множество точек и имеют размерности, близкие к значению 0,9999.

Для итерационных последовательностей точек для каждого фиксированного m и $n \rightarrow \infty$ размерность $\text{Dim}(u_{nm}^k) \rightarrow 1$ (например, при $m = 1$ для значений параметра $n = 1, 10^3$ и 10^6 величины соответствующих фрактальных размерностей 0,5, 0,863 и 0,926). Для гомологических рядов канторовых множеств для фиксированного m размерность $\text{Dim}(V_{nm}^k)$ при $n \rightarrow \infty$ закономерно снижается до минимально возможного значения (например, при $m = 1$ для значений параметра $n = 1, 10^3$ и 10^6 величины соответствующих фрактальных размерностей 0,6309, 0,0999 и 0,0499).

Таким образом, в 1D-пространстве, в соответствии с основными принципами, сформулированными в [3-7], могут быть сформированы фрактальные структуры $I(n/(n+m))\{0+\}$ и $C(n/(n+2m))\{1-\}$ – представители гомологических рядов итерационных последовательностей точек u_{nm}^k (в) и канторовых множеств V_{nm}^k (г). Данные фрактальные структуры характеризуются размерностями практически во всем диапазоне значений от 0,0001 до 0,9999.

Список литературы

1. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир. 1991. – 260 с.
2. Бурбаки Н. Теория множеств. – М.: Мир. 1965. – 455 с.
3. Иванов В.В., Таланов В.М. // Наносистемы: Физика, Химия, Математика. 2010. Т.1. №1. С.72-107.
4. Иванов В.В., Таланов В.М. // Успехи современного естествознания. 2012. №3. С.56-57.
5. Иванов В.В., Таланов В.М., Гусаров В.В. // Наносистемы: Физика, Химия, Математика. 2012. Т. 3. № 4. С. 82-100.
6. Иванов В.В., Щербаков И.Н., Таланов В.М. // Современные наукоемкие технологии. 2012. №1. С.54-55.
7. Иванов В.В., Таланов В.М. // Журн. структурной химии. 2013. Т. 54. № 2. С. 354-376.