УДК 517. 956. 6.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Жемухова З.М., Куготова М.Н.

ФГБОУ ВПО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова» Министерства образования и науки РФ, Нальчик, e-mail: zhiemukhova@mail.ru

Исследована краевая задача со смещением для вырождающегося гиперболического уравнения. При определенных условиях неравенственного типа на известные функции доказана теорема единственности. Вопрос существования решения задачи сведен к вопросу разрешимости сингулярного интегрального уравнения, которое редуцируется к уравнению Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого заключается из единственности решения задачи.

Ключевые слова: краевая задача со смещением, оператор дробного дифференцирования, оператор дробного интегрирования, задача Коши, уравнение Фредгольма, сингулярное интегральное уравнение

BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A SHIFT FOR DEGENERATE HYPERBOLIC EQUATION

Zhemukhova Z.M., Kugotova M.N.

FGBOU VPO «Kabardin-Balkar state university n.a. Kh.M. Berbekov», Nalchik, e-mail: zhiemukhova@mail.ru

We investigated a boundary value problem with a shift for degenerate hyperbolic equation. At restrictions inequality type on the known functions is proved the theorem of uniqueness. Existence of the solution is proved by way to reductions to equation of Fredholm second kind the unconditional solvability which follows from uniqueness of the solution of the problem.

Keywords: a boundary value problem with a shift, operator of fractional differentiation, operator of fractional integration, Fredholm equation, singular integral equation

Теория краевых задач для вырождающихся гиперболических и смешанного типов уравнений является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений с частными производными. Интерес к таким уравнениям объясняется как теоретической значимостью получаемых результатов, так и многочисленными практическими приложениями в газовой динамике, теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, в безмоментной теории оболочек, в магнитной гидродинамике, в теории электронного рассеивания, в математической биологии. Они имеют большое значение при математическом моделировании нефтяных пластов, фильтраций грунтовых вод, переноса тепла и массы в объекте, имеющего сложное строение, электрических колебаний в проводах и других областях.

Задачи со смещением существенно обобщают классические задачи для вырождающихся гиперболических и смешанного типов уравнений, имеют многомерные аналоги и содержат широкий класс корректных самосопряженных задач.

Цель исследования: доказать существование и единственность решения задачи со смещением для вырождающегося гиперболического уравнения.

Постановка задачи**.** Рассмотрим уравнение

$$|y|^l u_{xx} - u_{yy} = 0, \qquad (1)$$

где $l = m$ при $y > 0$ и $l = n$ при $y < 0$, m, n –положительные постоянные, в конечной области Ω, ограниченной характеристиками AC, BC, AD, BD уравнения (1), выходящими из точек $A(0, 0)$, $B(1, 0)$.

Пусть $\Omega_1 = \Omega\cap(y > 0)$, $\Omega_2 = \Omega\cap(y < 0)$, J – интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Задача. Найти решение уравнения (1)

$$u(x,y)=\begin{cases} u_1(x,y), & (x,y)\in\Omega_1 \\ u_2(x,y), & (x,y)\in\Omega_2 \end{cases}$$

из класса $C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega_1\cup J)\cap C^1(\Omega_2\cup J)\cap C^2(\Omega_1\cup\Omega_2)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\alpha_i(x)D_{0x}^{\varepsilon_i}x^{(2\varepsilon_i-1)}u[\theta_0^i(x)]+\beta_i(x)D_{x1}^{\varepsilon_i}(1-x)^{(2\varepsilon_i-1)}u[\theta_1^i(x)]=\gamma_i(x), \quad \forall x\in J,\ i=1,2 \qquad (2)$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0} u_y(x,y)=\alpha(x)\lim_{y\to-0} u_y(x,y)+\beta(x), \quad (3)$$

где $\varepsilon_1 = m/(2m+4)$, $\varepsilon_2 = n/(2n+4)$; $\theta_0^i(x)$, $\theta_1^i(x)$ – точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0) \in J$, с характеристиками AC, AD, BC, BD соответственно $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$, $\gamma_i(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – заданные функции, причем

$$\alpha_i^2(x)+\beta_i^2(x)\neq 0 \forall x\in\bar{J},\ i=1,2,$$

$\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$, $\gamma_i(x)\in C^1(\bar{J})\cap C^2(J)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)\in C^1(\bar{J})$, $D_{ax}^l f(x)$ – операторы дробного в смысле Римана – Лиувилля интегро-дифференцирования от функции $f(x)$ [9].

Задача (1)–(3) относится к классу краевых задач со смещением [6]. При $\alpha_2(x) = \beta_1(x) = 0$ существование и единственность решения задачи (1)–(3) были доказаны С.К. Кумыковой и Ф.Б. Нахушевой [2].

Единственность решения задачи

Пусть, как и принято, $\tau(x) = u(x, 0)$

$$\nu_1(x)=\lim_{y\to+0} u_{1y}(x,y);$$

$$\nu_2(x)=\lim_{y\to-0} u_{2y}(x,y).$$

Выписывая решение задачи Коши для уравнения (1) в областях Ω_1 и Ω_2 [1], а затем, удовлетворив его краевым условиям (2), получим соотношения между $\tau(x)$ и $\nu_i(x)$, $i = 1, 2$

$$\frac{\Gamma(2\varepsilon_2)}{\Gamma(\varepsilon_2)}\left[\alpha_2(x)x^{\varepsilon_2-1}+\beta_2(x)(1-x)^{\varepsilon_2-1}\right]\tau(x)=\gamma_2(x)+$$
$$+\frac{\Gamma(2-2\varepsilon_2)}{\Gamma(1-\varepsilon_2)}\left(\frac{n+2}{4}\right)^{1-2\varepsilon_2}\left[\alpha_2(x)D_{0x}^{\varepsilon_2}x^{2\varepsilon_2-1}D_{0x}^{\varepsilon_2-1}x^{-\varepsilon_2}\nu_2(x)+\right. \quad (4)$$
$$\left.+\beta_2(x)D_{x1}^{\varepsilon_2}(1-x)^{2\varepsilon_2-1}D_{x1}^{\varepsilon_2-1}(1-x)^{-\varepsilon_2}\nu_2(x)\right];$$

$$\frac{\Gamma(2\varepsilon_1)}{\Gamma(\varepsilon_1)}\left[\alpha_1(x)x^{\varepsilon_1-1}+\beta_1(x)(1-x)^{\varepsilon_1-1}\right]\tau(x)=\gamma_1(x)-$$
$$-\frac{\Gamma(2-2\varepsilon_1)}{\Gamma(1-\varepsilon_1)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\varepsilon_1}\left[\alpha_1(x)D_{0x}^{\varepsilon_1}x^{2\varepsilon_1-1}D_{0x}^{\varepsilon_1-1}x^{-\varepsilon_1}\nu_1(x)+\right. \quad (5)$$
$$\left.+\beta_1(x)D_{x1}^{\varepsilon_1}(1-x)^{2\varepsilon_1-1}D_{x1}^{\varepsilon_1-1}(1-x)^{-\varepsilon_1}\nu_1(x)\right],$$

принесенные на J из областей Ω_1 и Ω_2, где $\Gamma(\alpha)$ – гамма функция Эйлера [4].

Принимая во внимание равенства [3]

$$D_{0x}^{\varepsilon_i}x^{2\varepsilon_i-1}D_{0x}^{\varepsilon_i-1}x^{-\varepsilon_i}\nu(x)=x^{\varepsilon_i-1}D_{0x}^{2\varepsilon_i-1}\nu_i(x);$$

$$D_{x1}^{\varepsilon_i}(1-x)^{2\varepsilon_i-1}D_{x1}^{\varepsilon_i-1}(1-x)^{-\varepsilon_i}\nu_i(x)=(1-x)^{\varepsilon_i-1}D_{x1}^{2\varepsilon_i-1}\nu_i(x),$$

соотношения (5)–(4) перепишем в виде

$$\frac{\Gamma(2\varepsilon_1)}{\Gamma(\varepsilon_1)}\left[\alpha_1(x)(1-x)^{1-\varepsilon_1}+\beta_1(x)x^{1-\varepsilon_1}\right]\tau(x)=$$
$$=x^{1-\varepsilon_1}(1-x)^{1-\varepsilon_1}\gamma_1(x)-\frac{\Gamma(2-2\varepsilon_1)}{\Gamma(1-\varepsilon_1)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\varepsilon_1}\times \quad (6)$$
$$\times\left[\alpha_1(x)(1-x)^{1-\varepsilon_1}D_{0x}^{2\varepsilon_1-1}\nu_1(x)+\beta_1(x)x^{1-\varepsilon_1}D_{x1}^{2\varepsilon_1-1}\nu_1(x)\right];$$

$$\frac{\Gamma(2\varepsilon_2)}{\Gamma(\varepsilon_2)}\left[\alpha_2(x)(1-x)^{1-\varepsilon_2}+\beta_2(x)x^{1-\varepsilon_2}\right]\tau(x)=$$
$$=x^{1-\varepsilon_2}(1-x)^{1-\varepsilon_2}\gamma_2(x)-\frac{\Gamma(2-2\varepsilon_2)}{\Gamma(1-\varepsilon_2)}\left(\frac{n+2}{4}\right)^{1-2\varepsilon_2}\times \quad (7)$$
$$\times\left[\alpha_2(x)(1-x)^{1-\varepsilon_2}D_{0x}^{2\varepsilon_2-1}\nu_2(x)+\beta_2(x)x^{1-\varepsilon_2}D_{x1}^{2\varepsilon_2-1}\nu_2(x)\right].$$

Теорема. В области Ω не может существовать более одного решения задачи, если выполнено либо

$$\alpha(x)>0,\ \beta_1(x)=0,\quad \alpha_2(x)=0,\quad \forall x\in J, \tag{8}$$

либо

$$\alpha(x)\equiv 1,$$

$$\alpha_i(x)(1-x)^{1-\varepsilon_i}+\beta_i(x)x^{1-\varepsilon_i}\neq 0,\ \forall x\in \bar{J}; \tag{9}$$

$$\alpha_i(x)\neq 0,\ \left[\left(\frac{x}{1-x}\right)^{1-\varepsilon_1}\frac{\beta_i(x)}{\alpha_i(x)}\right]'\geq 0,\ \forall x\in \bar{J}. \tag{10}$$

Доказательство. При выполнении (8) единственность решения задачи (1)–(3) установлена в [2]. Докажем, что решение задачи единственно при выполнении условий (9), (10). Для этого покажем, что интеграл

$$J^*=\int_0^1 \tau(x)\nu_2(x)dx$$

не может быть отрицательным.

Полагая $\gamma_2(x)=0$, перепишем (7) в виде

$$c_2\tau(x)=a_2(x)D_{0x}^{2\varepsilon_2-1}\nu_2(x)+b_2(x)D_{x1}^{2\varepsilon_2-1}\nu_2(x),$$

где

$$c_2=\left(\frac{n+2}{4}\right)^{1-2\varepsilon_2}\frac{\Gamma(2\varepsilon_2)\Gamma(1-\varepsilon_2)}{\Gamma(\varepsilon_2)\Gamma(2-2\varepsilon_2)};$$

$$a_i(x)=\frac{(1-x)^{1-\varepsilon_i}\alpha_i(x)}{(1-x)^{1-\varepsilon_i}\alpha_i(x)+x^{1-\varepsilon_i}\beta_i(x)};$$

$$b_i(x)=\frac{x^{1-\varepsilon_i}\beta_i(x)}{(1-x)^{1-\varepsilon_i}\alpha_i(x)+x^{1-\varepsilon_i}\beta_i(x)}.$$

Рассмотрим интеграл

$$c_2J^*=\int_0^1 a_2(x)\nu_2(x)D_{0x}^{2\varepsilon_2-1}\nu_2(x)dx+$$
$$+\int_0^1 b_2(x)\nu_2(x)D_{x1}^{2\varepsilon_2-1}\nu_2(x)dx=\frac{1}{\Gamma(2-\varepsilon_2)}\int_0^1 a_2(x)\nu_2(x)dx\times \tag{11}$$
$$\times\int_0^x\frac{\nu_2(t)dt}{(x-t)^{2\varepsilon_2}}+\frac{1}{\Gamma(1-2\varepsilon_2)}\int_0^1 b_2(x)\nu_2(x)dx\int_x^1\frac{\nu_2(t)dt}{(t-x)^{2\varepsilon_2}}.$$

Воспользуемся формулой [4] для гамма функции

$$\int_0^\infty t^{\mu-1}\cos kt dt=\frac{\Gamma(\mu)}{k^\mu}\cos\frac{\mu\pi}{2}\ (k>0,\ 0<\mu<1).$$

Полагая в ней $k=|x-\xi|$, $\mu=2\varepsilon_2$, получим

$$\frac{1}{|x-\xi|^{2\varepsilon_2}}=\frac{1}{\Gamma(2\varepsilon_2)\cos\pi\varepsilon_2}\int_0^\infty t^{2\varepsilon_2-1}\cos t|x-\xi|dt.$$

Откуда, поменяв порядок интегрирования в (11), будем иметь

$$\frac{\pi c_2}{2\sin\pi\varepsilon_2}J^*=\int_0^\infty t^{2\varepsilon_2-1}dt\int_0^1 a_2(x)\nu_2(x)dx\int_0^x\nu_2(\xi)\cos t(x-\xi)d\xi+$$
$$+\int_0^\infty t^{2\varepsilon_2-1}dt\int_0^1 b_2(x)\nu_2(x)dx\int_x^1\nu_2(\xi)\cos t(\xi-x)d\xi.$$

С учетом $a_i(1)=b_i(0)=0$, вычислениями, аналогичными [2], получим

$$\frac{\pi c_2}{2\sin\pi\varepsilon_2}J^*=-\int_0^\infty t^{2\varepsilon_2-1}dt\int_0^1 a_2'(x)\left[\left(\int_0^x\nu_2(\xi)\cos\cos t\xi d\xi\right)^2+\left(\int_0^x\nu_2(\xi)\sin\sin t\xi d\xi\right)^2\right]dx+$$
$$+\int_0^x t^{2\varepsilon_2-1}dt\int_0^1 b_2'(x)\left[\left(\int_x^1\nu_2(\xi)\cos\cos t\xi d\xi\right)^2+\left(\int_x^1\nu_2(\xi)\sin\sin t\xi d\xi\right)^2\right]dx. \tag{12}$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условий теоремы $a_2'(x) \le 0$, $b_2'(x) \ge 0$ и, следовательно, $J^* \ge 0$.

При $\gamma_1(x) = 0$ из (6) также получается неравенство

$$\int_0^1 \nu_1(x)\tau(x)dx \le 0.$$

Так как при $\alpha(x) \equiv 1$, $\beta(x) \equiv 0$, $\nu_1(x) = \nu_2(x)$, то

$$\int_0^1 \tau(x)\nu_i(x)dx = 0, \quad (i = 1, 2).$$

Таким образом, левая часть (12) равна нулю. Поскольку слагаемые справа неотрицательны, то они также равны нулю. В частности,

$$\int_0^\infty t^{2\varepsilon_2-1}dt\left(\int_0^1 \nu_i(\xi)\cos\cos t\xi d\xi\right)^2 = 0;$$

$$\int_0^\infty t^{2\varepsilon_2-1}dt\left(\int_0^1 \nu_i(\xi)\sin\sin t\xi d\xi\right)^2 = 0.$$

Так как $t^{2\varepsilon_2-1} \ge 0$, то

$$\int_0^1 \nu_i(\xi)\cos\cos t\xi d\xi = 0,$$

$$\int_0^1 \nu_i(\xi)\cos\cos t\xi d\xi = 0$$

для всех $t \in (0,\infty)$, в частности, при $t = 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ При этих значениях t функции $\sin t\xi$ и $\cos t\xi$ образуют полную ортогональную систему функций в L^2.

Следовательно, $\nu_i(\xi) = 0$ почти всюду, а так как они непрерывны по условию, то $\nu_i(\xi) = 0$ всюду. Отсюда из (6), (7) при $\gamma_i(x) = 0$, $i = 1, 2$, заключаем, что $\tau(x) = 0$ и, следовательно, $u_i(x, y) = 0$ как решения задачи Коши в областях Ω_1, Ω_2 с нулевыми данными на J.

Существование решения задачи

Исключая $\tau(x)$ из (6) и (7), с учетом условия сопряжения (3), получим уравнение

$$\frac{1}{c_2}a_2(x)D_{0x}^{2\varepsilon_2-1}\nu_2(x) + \frac{1}{c_2}b_2(x)D_{x1}^{2\varepsilon_2-1}\nu_2(x) + \\ + \frac{1}{c_1}a_1(x)D_{0x}^{2\varepsilon_1-1}\alpha(x)\nu_2(x) + \frac{1}{c_1}b_1(x)D_{x1}^{2\varepsilon_1-1}\alpha(x)\nu_2(x) = f(x), \tag{13}$$

где

$$c_1 = \left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\varepsilon_1}\frac{\Gamma(2\varepsilon_1)\Gamma(1-\varepsilon_1)}{\Gamma(\varepsilon_1)\Gamma(2-2\varepsilon_1)};$$

$$f(x) = \frac{\Gamma(\varepsilon_1)}{\Gamma(2\varepsilon_1)}\frac{x^{1-\varepsilon_1}(1-x)^{1-\varepsilon_1}\gamma_1(x)}{\alpha_1(x)(1-x)^{1-\varepsilon_1} + \beta_2(x)x^{1-\varepsilon_1}} - \\ - \frac{\Gamma(\varepsilon_2)}{\Gamma(2\varepsilon_2)}\frac{x^{1-\varepsilon_2}(1-x)^{1-\varepsilon_2}\gamma_2(x)}{\alpha_2(x)(1-x)^{1-\varepsilon_2} + \beta_2(x)x^{1-\varepsilon_2}} - \\ - \frac{1}{c_1}\left[a_1(x)D_{0x}^{2\varepsilon_1-1}\beta(x) + b_1(x)D_{x1}^{2\varepsilon_1-1}\beta(x)\right].$$

Пусть $a_2(x) \ne 0$. Подействовав на обе части (13) оператором $D_{0x}^{(1-2\varepsilon_2)}$, будем иметь:

$$\frac{1}{c_2}\nu_2(x) + \frac{1}{c_2}D_{0x}^{1-2\varepsilon_2}\frac{b_2(x)}{a_2(x)}D_{x1}^{2\varepsilon_1-1}\nu_2(x) + \\ + \frac{1}{c_1}D_{0x}^{1-2\varepsilon_2}\frac{a_1(x)}{a_2(x)}D_{0x}^{2\varepsilon_1-1}\alpha(x)\nu_2(x) + \\ + \frac{1}{c_1}D_{0x}^{1-2\varepsilon_2}\frac{b_1(x)}{a_2(x)}D_{x1}^{2\varepsilon_1-1}\alpha(x)\nu_2(x) = D_{0x}^{1-2\varepsilon_2}f(x). \tag{14}$$

Существование решения задачи исследовано в случаях $m = n$ и $n > m$. При $n > m$ уравнение (14) сведено к сингулярному интегральному уравнению [5]

$$\frac{1}{c_2}\left[1+\alpha(x)+\frac{\pi\operatorname{ctg}(1-2\varepsilon_2)\pi}{\Gamma(2\varepsilon_2)\Gamma(1-2\varepsilon_2)}\frac{b_2(x)}{a_2(x)}\right]\nu_2(x)+\int_0^1\frac{K_1(x,\xi)\nu_2(\xi)d\xi}{|x-\xi|}=D_{0x}^{1-2\varepsilon_2}f(x), \quad (15)$$

а при $n = m$ совпадает с сингулярным интегральным уравнением

$$\frac{1}{c_2}\left[1+\alpha(x)+\frac{\pi\operatorname{ctg}(1-2\varepsilon_2)\pi}{\Gamma(2\varepsilon_2)\Gamma(1-2\varepsilon_2)}\frac{b_2(x)+b_1(x)\alpha(x)}{a_2(x)}\right]\nu_2(x)+ \\ +\int_0^1\frac{K_2(x,\xi)\nu_2(\xi)d\xi}{|x-\xi|}=D_{0x}^{1-2\varepsilon_2}f(x). \quad (16)$$

Из свойств функций $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$, $\gamma_i(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $i = 1, 2$, заключаем, что правая часть уравнений (15), (16) принадлежат классу $C^1(J)$, ,причем при $x \to 0$ и $x \to 1$ может обращаться в бесконечность порядка не выше $1 - 2\varepsilon_i$. Ядра уравнений (15), (16)

$$K_2(x,\xi)\in C(\bar{J}\times\bar{J})\cap C^1(J\times J).$$

Условие $A_i^2(x)+[K_i(x,x)^2]\neq 0$ гарантирует существование регуляризатора, приводящего уравнения (15), (16) к уравнению Фредгольма второго рода, где

$$A_1(x)=\frac{1}{c_2}\left[1+\frac{\pi\operatorname{ctg}(1-2\varepsilon_2)\pi}{\Gamma(2\varepsilon_2)\Gamma(1-2\varepsilon_2)}\frac{b_2(x)}{a_2(x)}\right],$$

при $n > m$, а при $n = m$

$$A_2(x)=\frac{1}{c_2}\left[1+\alpha(x)+\frac{\pi\operatorname{ctg}(1-2\varepsilon_2)\pi}{\Gamma(2\varepsilon_2)\Gamma(1-2\varepsilon_2)}\frac{b_2(x)+b_1(x)\alpha(x)}{a_2(x)}\right].$$

Из возможности приведения задачи к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода и единственности искомого решения следует существование решения поставленной задачи. По найденному $\nu_2(x)$ можно найти $\nu_1(x)$, а следовательно и $\tau(x)$. Решение задачи (1)–(3) может быть найдено как решение задачи Коши в областях Ω_1 и Ω_2.

Отметим, что задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов с операторами обобщенного дробного интегро-дифференцирования исследовались в работах [7, 8].

Список литературы

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 488 с.

2. Кумыкова С.К., Нахушева Ф.Б. Об одной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т.14, № 1. – С. 50–65.

3. Кумыкова С.К. Об одной задаче с нелокальными краевыми условиями на характеристиках для уравнения смешанного типа // Дифференциальные уравнения. – 1974. – Т.10, № 1. – С. 78–88.

4. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.: Физматгиз, 1963. – 358 с.

5. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.

6. Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. – 1969. – Т.5, № 1. – С. 44–59.

7. Репин О.А., Кумыкова С.К. Задача с обобщенными операторами дробного интегро – дифференцирования произвольного порядка // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2012. – № 12. – С. 59–71.

8. Репин О.А., Кумыкова С.К. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения смешанного типа в неограниченной области // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т.48, № 8. – С. 1140–1149.

9. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.