УДК 517. 935

ВНУТРЕННЕКРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Жемухова З.М.

ФГБОУ ВПО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова» Министерства образования и науки РФ, Нальчик, e-mail: zhiemukhova@mail.ru

Исследована внутреннекраевая задача для псевдопараболического уравнения третьего порядка в прямоугольной области. Путем редукции к уравнению Вольтерра второго рода доказана однозначная и безусловная разрешимость задачи.

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, внутреннекраевая задача, функция Римана, задача Гурса, уравнение Вольтерра

INSIDE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE PSEUDOPARABOLIC EQUATION

Zhemukhova Z.M.

FGBOU VPO «Kabardin-Balkar state university n.a. K.M. Berbekov», Nalchik, e-mail: zhiemukhova@mail.ru

The work is devoted to the investigation of the inside boundary value problem for the pseudoparabolic equation in rectangular region. Existence and uniqueness of the solution was proved by the reduction of second sort Volterr equation.

Keywords: pseudoparabolic equation, inside boundary value problem, Riman function, Gursa problem, Volterra equation

Решение многих практически важных задач, возникающих при исследовании процессов фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах [1], [9], движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах [10] связано с необходимостью исследования нелокальных задач для псевдопараболических уравнений [2].

Для модельного псевдопараболического уравнения А.М. Нахушевым в [8] была сформулирована краевая задача с нелокальным условием.

Цель исследования: доказать существование и единственность решения нелокальной задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка.

Постановка задачи. Пусть

$$D=\{(x,t):0<x<H,\ 0<t<T\}$$

конечная область плоскости переменных *xyt* J_1 интервал $0<t<T$ прямой $x=x_0$. Для общего псевдопараболического уравнения

$$L(u)=u_{xxt}+d(x,t)u_t+(x,t)u_{xx}+a(x,t)u_x+b(x,t)u=-q(x,t),$$

в области D ставится задача.

Задача. Найти регулярное в области D/J_1 решение $u(x,t)$ уравнения (1) из класса $u(x,t)\in C(\bar{D})\cap C^1(D)$ удовлетворяющее условиям:

$$u(x,0)=h(x) \qquad x\in[0,H], \tag{2}$$

$$u_x(x_0,t)=f(t) \qquad t\in[0,T], \tag{3}$$

$$u(x_1,t)=\gamma u(x_2,t) \qquad t\in[0,T], \tag{4}$$

где $x_1<x_0<x_2$ – произвольно фиксированные точки из интервала $0<x<H$, $\gamma=\text{const}$ $f(t)$ и $h(x)$ непрерывные функции.

Справедлива следующая теорема.

Теорема: Если коэффициенты уравнения (1) и заданные функции удовлетворяют условиям

$$_x(x,y),d_1(x,t),c_1(x,t),a_x(x,t),b(x,y),q(x,t)\in C(\bar{D}),$$

$$h(x)\in C^2(0,H),\ \ f(t)\in C^1(0,T)$$

а также

$$\gamma\le 0, \qquad d(x,t)<0 \quad \forall(x,t)\in D,$$

то задача (1)-(4) разрешима и притом единственным образом.

Доказательство. Справедливость теоремы докажем методом функции Римана [8].

В области

$$D_1 = \{(x,t): 0 < x < x_0,\ 0 < t < T\}$$

рассмотрим характеристическую задачу Гурса [3]

$$u(x_0, 0) = \varphi(t) \qquad t \in [0,T], \quad (5)$$

$$u_x(x_0, t) = f(t) \qquad t \in [0,T],$$

$$u(x,0) = h(x) \qquad t \in [0,H], \quad (7)$$

для уравнения (1), где $\varphi(t)$ – неизвестная пока функция из класса $C^1[0,T]$.

Пусть $w(x,t;\alpha,\beta)$ – функция Римана, введенная в [8], которая однозначно определяется следующими требованиями:

$$M(w) = 0,$$

$$\begin{cases} w(\alpha,t;\alpha,\beta) = 0, \quad w_x(\alpha,t;\alpha,\beta) = exp\left(\int\limits_\beta^\tau (\alpha,t_1)\,dt_1\right) \\ w(x,\beta;\alpha,\beta) = w_2(x,\beta) \end{cases}$$

где $w_2(\alpha,\beta)$ – решение следующей задачи:

$$\begin{cases} w_{xx}(x,\beta;\alpha,\beta) + d(x,\beta)w(x,\beta;\alpha,\beta) = 0, \\ w(\alpha,\beta;\alpha,\beta) = 0,\ w_x(\alpha,\beta;\alpha,\beta) = 1, \end{cases}$$

(α,β) – произвольная точка области D_1.

Единственность и существование функции Римана $w(x,t;\alpha,\beta)$ доказывается методом редукции к нагруженным интегро-дифференциальным уравнениям [7].

Интегрируя тождество

$$vL(u) - uM(v) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}[vu_{xt} + uv_{xt} + vu_x - u(v)_x + auv] + \frac{\partial}{\partial t}[duv - u_x v_x] \qquad (8)$$

по области $D_1 = \{(x,t):\ 0 < \alpha < x < x_0,\ 0 < t < \beta\}$ с учетом свойств функции Римана $w(x,t;\alpha,\beta)$ и условий (5) – (7), получим

$$u(\alpha,\beta) = \varphi(\beta)\,w_x(x_0,\beta;\alpha,\beta) +$$

$$+\int\limits_0^{x_0}[d(x,0)h(x)w(x_0,0;\alpha,\beta) - w_x(x_0,0;\alpha,\beta)h'(x)]dx -$$

$$-\int\limits_0^{\beta}\{w(x_0,\beta;\alpha,\beta)f'(t) + (x_0,t)w(x_0,t;\alpha,\beta)f(t) +$$

$$+\varphi(t)\big[w_{xt}(x_0,t;\alpha,\beta) -_x (x_0,t)w(x_0,t;\alpha,\beta) - (x_0,t)w_x(x_0,t;\alpha,\beta) +$$

$$+a(x_0,t)w(x_0,t;\alpha,\beta)]\}dt + \int\limits_\alpha^{x_0}\int\limits_0^{\beta} w(x,t;\alpha,\beta)\,q(x,t)\,dxdt. \qquad (9)$$

Формула (9) дает явное представление решения задачи Гурса (1), (5)-(7).

Для нахождения неизвестной функции $\varphi(t)$ по аналогичной схеме в $D_2 = \{(x,t): x_0 < x < H,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим характеристическую задачу Гурса

$$u(x_0,t) = \varphi(t) \qquad t \in [0,T], \quad (10)$$

$$u_x(x_0,t) = f(t) \qquad t \in [0,T], \quad (11)$$

$$u(x,0) = h(x) \qquad t \in [0,H], \quad (12)$$

для уравнения (1).

Пусть $v(x,t;,\tau)$ – функция Римана, удовлетворяющая условиям:

$$M(v) = 0,$$

$$\begin{cases} v(,t;,\tau) = 0, \quad v_x(,t;,\tau) = \exp\left(\int\limits_\tau^t (,t_1)\,dt_1\right) \\ v(x,\tau;,\tau) = w_1(x,\tau) \end{cases}$$

где $w_1(x,\tau)$ – решение задачи [5]:

$$\begin{cases} v_{xx}(x,\tau;,\tau) + d(x,\tau)v(x,\tau;,\tau) = 0, \\ v(x,\tau;,\tau)|_{x=} = 0,\ v_x(x,\tau;,\tau)|_{x=} = 1, \end{cases}$$

$(,\tau)$ – произвольная точка области D_2.

Интегрируя тождество (9) по области $_1 = \{(x,t): 0 < \alpha < x < x_0,\ 0 < t < \beta\}$ и пользуясь свойством функции Римана $v(x,t;\alpha,\beta)$ получим

$$u(,\tau) = \varphi(t)v_x(x_0,\tau;,\tau) +$$

$$+\int\limits_0^\tau \{v(x_0,\tau;,\tau)f^{'}(t) + (x_0,t)w(x_0,t;,\tau)f(t)dx +$$

$$+\varphi(t)\left[v_{xt}(x_0,t;,\tau) -_x (x_0,t)v(x_0,t;,\tau) - (x_0,t)v_x(x_0,t;,\tau) +\right.$$

$$+\ a(x_0,t)v(x_0,t;,\tau)]\}dt - \int\limits_{x_0} [d(x,0)h(x)v(x,0;,\tau) -$$

$$-v_x(x_0,0;,\tau)h^{'}(x)]dx + \int\limits_\alpha^{x_0}\int\limits_0^\beta w(x,t;\alpha,\beta)q(x,t)\,dxdt. \quad (13)$$

Формула (13) дает представление решения задачи Гурса (1), (10)-(12).

Тогда при выполнении условия $\gamma \le 0$ теоремы, выполняется неравенство

$$(\tau) = w_x(x_0,\tau;x_1,\tau) - \gamma v_x(x_0,\tau;x_1,\tau) \ne 0.$$

С учетом (14), используя условие склеивания (4), из соотношений (9) и (13) получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\varphi(\tau)$

$$\varphi(\tau) = \Phi_0(\tau) + \int\limits_0^\tau K_0(t,\tau)\varphi(t)dt, \quad (15)$$

где

$$\Phi_0 = \frac{\Phi(\tau)}{(\tau)}, \quad K_0(\tau,t) = \frac{K(\tau,t)}{(\tau)}.$$

Так как с учетом гладкости известных функций

$$\Phi_0(\tau) \in C^1[0,T], \quad K_0(t,\tau) \in C[0,T],$$

то на основании свойств функций Римана $v(x,t;,\tau)$ и $w(x,t;\alpha,\beta)$ и условия теоремы, то единственное регулярное решение $\varphi(t)$ интегрального уравнения Вольтерра второго рода (15) из класса $C^1[0,T]$ представимо в виде

$$\varphi(\tau) = \Phi_0(\tau) + \int\limits_0^t R(t,\tau)\Phi_0(t)dt, \quad (16)$$

где $R(t,\tau)$ – резольвента ядра $K_0(t,\tau)$.

После определения функции $u(x_0,t) = \varphi(t)$ формулой (16) исследуемая задача распадается на две характеристические задачи (5) – (7) и (10) – (12) для псевдопараболического уравнения (1) единственные регулярные решения которых даются соответственно, формулами (9) и (13).

Из единственности регулярного решения указанных характеристических задач Гурса для уравнения (1) следует справедливость теоремы.

Нелокальные внутреннекраевые задачи для уравнений смешанного типа исследовались также в работах [3-7].

Список литературы

1. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Когина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, №5. – С. 852-864.

2. Водахова В.А. Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т.18, №2. – С. 280-285.

3. Репин О.А., Кумыкова С.К. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения смешанного типа в неограниченной области // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т.48, №8. – С. 1140-1149.

4. Елеев В.А., Кумыкова С.К. Внутреннекраевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками // Известия Кабардино – Балкарского научного центра РАН. – 2010. – №5. – С. 50-65.

5. Кумыкова С.К. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения $signy|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0$ // Дифференциальные уравнения. – 1976. – Т. 12, №1. – С. 79-88.

6. Кумыкова С.К. Задача с нелокальными условиями на характеристиках для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. 17, №1. – С. 81-90.

7. Кумыкова С.К., Нахушева Ф.Б. Об одной задаче для гиперболического уравнения вырождающегося внутри области // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14, №1. – С. 50-65.

8. Нахушев А.М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влажности // Дифференциальные уравнения. – 1979. – т. 15, №1. – С. 96-105.

9. Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференциальные уравнения. – 1982. – т.18, №4. – С. 689-700.

10. Colton D.L. On the analytic theory of pseudoparabolic equations // Quart. J. Math. – 1972. – Vol. 23. – P. 179-192.