УДК 517.912

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Водахова В.А., Гучаева З.Х.

ФГБОУ ВПО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова», Нальчик, e-mail: proporwiz@yandex.ru

Для уравнения смешанного типа исследована краевая задача в прямоугольной области. Обоснованно утверждение о существовании единственного решения поставленной задачи методом Фурье.

Ключевые слова: задача Дирихле, уравнение смешанного параболо-гиперболического типа, единственность *и* **существование решения, равномерная сходимость, метод Фурье**

DIRICHLET PROBLEM FOR THE MIXED TUPE PARABOLIC – HYPERBOLIC EQUATION WITH THE DISCONTINUITY COEFFICIENTS

Vodakhova V.A., Guchaeva Z.K.

FGBOU VPO «Kabardin-Balkar state university n.a. Kh. M. Berbekov», Nalchik, e-mail: proporwiz@yandex.ru

The boundary-value problem in the rectangular region for the mixed type equation was investigated. An assertion about existence of the unique solution of stated problem by Fourier's method was substantiated.

Keywords: Dirichlet problem, mixed parabololic- hyperbolic type equation, uniqueness and existence of the solution, the uniform convergence, Fourier's method

Классические краевые задачи для эллиптических уравнений, такие как задачи Дирихле, Неймана, общая краевая задача перестают быть корректными для уравнений смешанного типа. В работах Н.Н. Вахания [2], J.R. Cannon [10] доказана корректность задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева – Бицадзе в прямоугольных областях. А.М. Нахушевым [9] установлено, что задача Дирихле для уравнения Лаврентьева – Бицадзе в конечной смешанной области, ограниченной в верхней полуплоскости $y>0$ кусочно-гладкой кривой, содержащей интервал (0,1) прямой $y=0$, а гиперболическая часть области квадрат, всегда разрешима и притом единственным образом.

Цель исследования: доказать существование и единственность решения аналога задачи Дирихле для уравнения смешанного параболо – гиперболлического типа.

Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-u_y+c_1u, & y>0,\\ u_{xx}-(-y)^m u_{yy}+c_2u, & y<0, \quad 0<m<1, \end{cases} \tag{1}$$

где c_1, $c_2 = const$, в конечной области Ω, ограниченной отрезками A_2A_1, A_1B_1, B_1B_2, B_2A_2 прямых x=0, y=a>0, x=1, y=–b (b>0), соответственно и характеристиками уравнения (1) при $y<0$

$$AB_1: x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=0;$$

$$BA_1: x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=1.$$

Обозначим через $\Omega_1=\Omega\cap(y>0)$, $\Omega_2=\Omega\cap(y<0)$ параболическую и гиперболическую части области Ω соответственно; $AB=\{(x,y): x\in(0,1), y=0\}$.

Задача**.** В области Ω найти решение u=$u(x,y)$ из класса

$$u(x,y)\in C(\bar{\Omega})\cap C^1(\Omega_1\cup AB)\cap C^1(\Omega_2\cup AB)\cap C^2(\Omega_1\cup\Omega_2),$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0,y)=u(1,y)=0, \quad -\beta\le y<\alpha, \tag{2}$$

$$u(x,-\beta)=\psi_{-\beta}(x), \quad 0\le x\le 1 \tag{3}$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to 0+} u_y(x,y) = -\lim_{y\to 0-} u_y(x,y), \tag{4}$$

где $\psi_{-\beta}(x)$ – заданная функция.

Теорема 1. Если выполнены условия:

1) $\psi_{-\beta}(x)\in C^4(J)$;

2) $\psi_{-\beta}(0)=\psi_{-\beta}(1)=0,\quad \psi^k_{-\beta}(0)=\psi^k_{-\beta}(1)=0,\quad \mathrm{k}=\overline{1,4}$;

3) $$\left(\frac{d\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}_n}}{2}\right)^{\frac{2}{2-m}}\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{2-m}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2-m}\right)}\neq\bar{\lambda}_n\frac{J_{\frac{1}{2-m}}\left(d\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}_n\beta^{2-m}}\right)}{J_{-\frac{1}{2-m}}\left(d\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}_n\beta^{2-m}}\right)},\tag{5}$$

где $d=\dfrac{2}{2-m}$, $\bar{\bar{\lambda}}_n=\lambda_n-c_2$, $\bar{\lambda}_\mathrm{n}=\lambda_n-c_1$, $\lambda_\mathrm{n}=\pi n$, $\mathrm{n}=1,2,...$, $\mathrm{J}_{\frac{1}{\text{2-m}}}(z)$ – функции Бесселя первого рода порядка $\dfrac{1}{2-m}$, то решение задачи (1) – (4) существует и единственно.

Доказательство единственности решения поставленной задачи аналогично [3].

Докажем существование решения задачи (1)-(4).

В области Ω, решение поставленной задачи будем искать методом разделения переменных.

Решение задачи (1)-(4) выписывается в явном виде

$$u(x,y)=\begin{cases}u^+(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\psi_{-\beta_n}\Phi_n(y)\sin\sqrt{\lambda_n}x, & \mathrm{y}>0,\\ u^-(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\psi_{-\beta_n}F_n(y)\sin\sqrt{\lambda_n}x, & \mathrm{y}<0,\end{cases}\tag{6}$$

где $$\Phi_n(y)=\frac{d^{\frac{1}{2-m}}e^{-\bar{\lambda}_n y}}{E(\lambda_n,\beta,m)};\tag{7}$$

$$F_n(y)=\left(\frac{d^2\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}_n}}{2}\right)^{\frac{1}{2-m}}\frac{\sqrt{-y}}{E(\lambda_n,\beta,m)}\left[\bar{\lambda}_n\Gamma\left(1+\frac{1}{2-m}\right)J_{\frac{1}{2-m}}\left(d\sqrt{(-y)^{2-m}\bar{\bar{\lambda}}_n}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{2}{\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}_n}d}\right)^{\frac{2}{2-m}}+\Gamma\left(1-\frac{1}{2-m}\right)J_{-\frac{1}{2-m}}\left(d\sqrt{(-y)^{2-m}\bar{\bar{\lambda}}_n}\right)d^{\frac{1}{2-m}}\right];\tag{8}$$

$$E(\lambda_n,\beta,m)=\sqrt{\beta}\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{2-m}\right)\bar{\lambda}_n\left(\frac{\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}_n}}{2}\right)^{-\frac{2}{2-m}}J_{\frac{1}{2-m}}\left(d\sqrt{\beta^{2-m}\bar{\bar{\lambda}}_n}\right)+\right.$$
$$\left.+d^{\frac{2}{2-m}}\Gamma\left(1-\frac{1}{2-m}\right)J_{-\frac{1}{2-m}}\left(d\sqrt{\beta^{2-m}\bar{\bar{\lambda}}_n}\right)\right]\left(\frac{\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}_n}}{2}\right)^{-\frac{1}{2-m}},$$

$\psi_{-\beta_n}$ – коэффициенты Фурье функции $y_{-b}(x)$.

Ряды (6) также как и ряды, полученные почленным двукратным дифференцированием, сходятся абсолютно и равномерно в Ω_1 и Ω_2.

В самом деле, покажем, что ряд

$$u^+(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{-\beta_n}\Phi_n(y)\sin\sqrt{\lambda_n}x, \quad (9)$$

где $\Phi_n(y)$ – определяется формулой (7), действительно является регулярным решением задачи (1) – (4) в области Ω_1. Для этого ниже мы покажем непрерывность как самой функции $u^+(x,y)$ так и ее производных до второго порядка включительно.

Используя условия (1), (2) теоремы 1, проинтегрировав равенство

$$\psi_{-\beta_n}=\int_0^1\psi_{-\beta_n}(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}\xi d\xi$$

по частям, нетрудно показать, что коэффициенты Фурье $\psi_{-\beta_n}$ граничной функции $y_{-b}(x)$ не превосходят величины $1/(\lambda_n)^{2/3}$.

Пользуясь неравенством

$$\left|\psi_{-\beta_n}\Phi_n(y)\sin\sqrt{\lambda_n}x\right|\le\left|\psi_{-\beta_n}\right|,$$

заключаем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\psi_{-\beta_n}\right| \quad (10)$$

является мажорантным для ряда (9). Отсюда заключаем сходимость ряда (10), и, следовательно, равномерномерную сходимость ряда (9), и непрерывность функции $u^+(x,y)$.

Аналогично можно установить равномерную сходимость продифференцированных рядов до второго порядка включительно:

$$\frac{\partial u^+}{\partial x}=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{-\beta_n}\sqrt{\lambda_n}\Phi_n(y)\cos\sqrt{\lambda_n}x,$$

$$\frac{\partial^2 u^+}{\partial x^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{-\beta_n}\sqrt{\lambda_n}\Phi_n(y)\sin\sqrt{\lambda_n}x,$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial y}=-\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{-\beta_n}\bar{\lambda}_n\Phi_n(y)\sin\sqrt{\lambda_n}x,$$

$$\frac{\partial^2 u^+}{\partial y^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{-\beta_n}\bar{\lambda}_n^2\Phi_n(y)\sin\sqrt{\lambda_n}x.$$

Обратимся теперь к равенству

$$u^-(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{-\beta_n}F_n(y)\sin\sqrt{\lambda_n}x, \quad (11)$$

где

$$F_n(y)=\left(\frac{d^2\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}_n}}{2}\right)^{\frac{1}{2-m}}\frac{\sqrt{-y}}{E(\lambda_n,\beta,m)}\left[\bar{\lambda}_n\Gamma\left(1+\frac{1}{2-m}\right)J_{\frac{1}{2-m}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(d\sqrt{(-y)^{2-m}\bar{\bar{\lambda}}_n}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}_n}d}\right)^{\frac{2}{2-m}}+\Gamma\left(1-\frac{1}{2-m}\right)J_{-\frac{1}{2-m}}\left(d\sqrt{(-y)^{2-m}\bar{\bar{\lambda}}_n}\right)d^{\frac{1}{2-m}}\right].$$

Докажем, что решение, представленное рядом (11), действительно является регулярным в области Ω_2. Для этого мы покажем равномерную сходимость как ряда (11), так и рядов, почленно продифференцированных два раза по переменным *x, y*, т.е.

$$\frac{\partial u^-}{\partial x}=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{-\beta_n}F_n(y)\cos\sqrt{\lambda_n}x,$$

$$\frac{\partial^2 u^-}{\partial x^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\psi_{-\beta_n}F_n(y)\sin\sqrt{\lambda_n}x.$$

$$\frac{\partial u^-}{\partial y}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d^2\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}_n}}{2}\right)^{\frac{1}{2-m}}d\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}_n}\,\frac{(-y)^{(1-m)/2}}{E(\lambda_n,\beta,m)}\psi_n\times\left[\bar{\lambda}_n\Gamma\left(1+\frac{1}{2-m}\right)J_{\frac{1}{2-m}-1}\left(d\sqrt{(-y)^{2-m}\bar{\lambda}_n}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}_n}d}\right)^{\frac{2}{2-m}}+\right.$$

$$+\Gamma\left(1-\frac{1}{2-m}\right)J_{-\frac{1}{2-m}+1}\left(d\sqrt{(-y)^{2-m}\bar{\bar{\lambda}}_n}\right)d^{\frac{1}{2-m}}\Bigg]\sin\sqrt{\lambda_n}x,$$

$$\frac{\partial^2 U^-}{\partial y^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d^2\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}_n}}{2}\right)^{\frac{2}{2-m}}\left(d\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}_n}\right)^2(-y)^{-m/2}U^-(x,y).$$

Известно [1], что функции

$$\sqrt{-y}J_{\frac{1}{2-m}}\left(d\sqrt{(-y)^{2-m}\bar{\bar{\lambda}}_n}\right)$$

и $\sqrt{-y}J_{\frac{1}{m-2}}\left(d\sqrt{(-y)^{2-m}\bar{\bar{\lambda}}_n}\right)$

являются непрерывными и ограниченными. Это следует из свойств бесселевых функций первого рода.

Лемма 1. Для всех n и $y\in[-b;\ 0]$ существует постоянная $k_1>0$, такая, что

$$|A_n(y)|\le k_1, \tag{12}$$

где $A_n(y)=\sqrt{-y}J_{\frac{1}{2-m}}\left(d\sqrt{(-y)^{2-m}\bar{\bar{\lambda}}_n}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2-m}\right)$.

Доказательство: Из свойств бесселевых функций первого рода, следует, что функция $A_n(y)$ является непрерывной по переменной y на отрезке $[-b;\ 0]$. Следовательно, она ограничена.

При $n\to\propto$ для любого $y\in[-b;\ 0]$ функция $A_n(y)$ является бесконечно малой, порядка $1/2$.

Действительно,

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{2-m}\right)(-y)^{1/2}J_{\frac{1}{2-m}}\left(d\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}_n}(-y)^{\frac{2-m}{2}}\right)=$$

$$=(-y)^{m/4}\Gamma\left(\frac{1}{2-m}+1\right)\sqrt{\frac{2}{\pi d\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}_n}}}\times\left[\cos\left(z_1-\frac{3\pi}{4}\right)+0\left(\frac{1}{z_1}\right)\sin z_1+0\left(\frac{1}{z_1}\right)\cos z_1\right]=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{(-y)^m}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi d}\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}_n}}\Gamma\left(1+\frac{1}{2-m}\right)\times\left[\cos\left(z_1-\frac{3\pi}{4}\right)+0\left(\frac{1}{z_1}\right)\sin z_1+0\left(\frac{1}{z_1}\right)\cos z_1\right]\le\frac{\sqrt[4]{(-y)^m}}{\sqrt{\pi d}\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}_n}}\Gamma\left(1-\frac{1}{2-m}\right),$$

где $\bar{\bar{\lambda}}_n\to 0$ при $n\to\propto$,

$$z_1=d\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}_n}(-y)^{\frac{2-m}{2}}-\frac{3\pi}{4}.$$

Таким образом, при всех $y\in[-b;\ 0]$ и $n\in N$ постоянная k_1 такая, что справедлива оценка (12).Известно, что $\Gamma\left(\frac{1}{2-m}\right)<1$.

Справедливы утверждения:

Лемма 2. Для всех $n\in N$ и любого $y\in[-b;\ 0]$ существует постоянная $k_2>0$ такая, что

$$|B_n(y)|\le k_2,$$

где $B_n(y)=\sqrt{-y}\Gamma\left(1-\frac{1}{2-m}\right)J_{\frac{1}{2-m}}\left(\left(d\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}_n}\right)(-y)^{\frac{2-m}{2}}\right)$.

Лемма 3. Для всех $n\in N$ и любого $y\in[-b;\ 0]$ существуют постоянные $k_3>0$ и $k_4>0$ такие, что

$$|D_n(y)|\le n\,k_3,\ |C_n(y)|\le n\,k_4,$$

где

$$D_n(y)=d\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}_n}(-y)^{\frac{1-m}{2}}J_{\frac{1}{2-m}-1}\left(d\sqrt{(-y)^{2-m}\bar{\bar{\lambda}}_n}\right),$$

$$C_n(y)=d\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}_n}(-y)^{\frac{1-m}{2}}J_{1-\frac{1}{2-m}}\left(d\sqrt{(-y)^{2-m}\bar{\bar{\lambda}}_n}\right)$$

Лемма 4. Для всех $n\in N$ и любого $y\in[-b;\ 0]$ существуют постоянные $k_5>0$ и $k_6>0$ такие, что

$$|L_n(y)|\le n^2 k_5,\ |W_n(y)|\le n^2 k_6$$

где

$$L_n(y)=-\left(\sqrt{-y}\right)^{1-2m}d\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}_n}J_{\frac{1}{2-m}}\left(d\sqrt{(-y)^{2-m}\bar{\bar{\lambda}}_n}\right),$$

$$W_n(y)=(-y)^{\frac{1-m}{2}}d\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}_n}J_{\frac{1}{m-2}}\left(d\sqrt{(-y)^{2-m}\bar{\bar{\lambda}}_n}\right)$$

Доказательство лемм 2-4 проводится аналогично доказательству леммы 1.

Предположим, что $y_{-b}(x)$ непрерывно дифференцируема до третьего порядка включительно. В силу того, что $y_{-b}(0)=y_{-b}(1)=0$ ее можно продолжить непрерывно на интервале [0,1] . Обозначим через $\tilde{\psi}_{-\beta}(x)$ периодическую на всей действительной оси функцию, которая является периодическим продолжением функции $y_{-b}(x)$. Будем предполагать, что $\tilde{\psi}_{-\beta}(x)$ является также непрерывно дифференцируемой функцией до третьего порядка включительно.

Продолженную функцию можно представить в виде ряда Фурье на всей оси. При изменении аргумента x в пределах $0\leq x\leq 1$ полученный ряд будет совпадать с граничной функцией $y_{-b}(x)$.

Таким образом, с помощью лемм 1–4 и выше приведенной теоремы 1 можно утверждать справедливость следующей теоремы

Теорема 2. Пусть числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\nu}\left|\psi_{-\beta}\right|, \quad \nu=0,1,2,3$ сходится.

Тогда:

Ряды $u(x,y)$, $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$ сходятся абсолютно и равномерно в замкнутой области $\overline{\Omega}$.

Ряды $u_{xx}(x,y)$ и $u_{yy}(x,y)$ сходятся абсолютно и равномерно в области Ω.

Следует отметить, что нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа исследовались также в работах [4-8].

Список литературы

1. Ватсон Т.Н. Теория бесселевых функций. – М.: ИЛ, 1949. – 220 с.

2. Вахания Н.Н. О задаче Дирихле для уравнения колебания струны // Сообщ. АН Груз.ССР. – 1958. – Т. 21, №2. – С. 131-138.

3. Елеев В.А., Гучаева З.Х. Нелокальная краевая задача для уравнения Лаврентьева – Бицадзе в прямоугольной области // Известия Кабардино-Балкарского государственного университета. – 2011. – Т.1, №1. – С. 9-21.

4. Елеев В.А., Кумыкова С.К. Внутреннекраевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2010. – №5. – С. 5-14.

5. Кумыкова С.К. Задача с нелокальными условиями на характеристиках для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. 17, №1. – С. 81-90.

6. Кумыкова С.К. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения $signy \cdot |y|^m u_{xx}+u_{yy}=0$ // Дифференциальные уравнения. – 1976. – Т. 12, №1. – С. 79-88.

7. Кумыкова С.К., Нахушева Ф.Б. Об одной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14, №1. – С. 50-65.

8. Репин О.А., Кумыкова С.К. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения смешанного типа в неограниченной области // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, №8. – С. 1140-1149.

9. Нахушев А.М. Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Дифференциальные уравнения. – 1970. – Т. 6, №1. – С. 190-191.

10. Cannon J.R/ Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinius coefficient // Ann. Math pura ad appl. – 1963. – Vol.62. – P.371-377.