удовлетворяющий уравнению связи $b_1 + b_2 + b_3 = b$, приходим к соотношению $b_1 = b_2 = b_3 = b/3$.

В ходе проделанной работы выявлено, что для максимального извлечения вещества при экстракции следует пользоваться равными количествами растворителя.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

Ахметова Ю.А., Афонасенков О.В.

Волжский политехнический институт, филиал Волгоградского государственного технического университета, Волжский, www.volpi.ru, e-mail: yahmetova@yandex.ru

Вопрос о том, когда решение дифференциального уравнения существует, когда оно единственно, решается так называемыми теоремами существования и единственности. Эти теоремы очень важны, как для самой теории, так и для практики. Они гарантируют законность применения качественных методов теории дифференциальных уравнений для решения задач естествознания и техники. Численному интегрированию дифференциального уравнения обязательно должно предшествовать обращение к теоремам существования и единственности. И это необходимо делать для того, чтобы избежать недоразумений или вообще неправильных выводов.

Теорема существования. *Если в уравнении*

$$y' = f(x,y) \qquad (1)$$

функция f определена и непрерывна в некоторой ограниченной области D плоскости (x, y), то для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ существует решение y(x) начальной задачи

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \qquad (2)$$

определенное на некотором интервале, содержащем точку x_0.

Теорема существования и единственности. *Если в уравнении $y' = f(x,y)$ функция f определена и непрерывна в некоторой ограниченной области D плоскости (x,y), причем она удовлетворяет в области D условию Липшица по переменной y, т.е.*

$$\left|f(x,y_2) - f(x,y_1)\right| < L\cdot\left|y_2 - y_1\right|,$$

где L – положительная постоянная, то для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ существует единственное решение y(x) начальной задачи (2) определенное на интервале, содержащем точку x_0.

Теорема о продолжении. *При выполнении условий теоремы существования или теоремы существования и единственности всякое решение уравнения $y' = f(x,y)$ с начальными данными $(x_0, y_0) \in D$ может быть продолжено до точки, сколь угодно близкой к границе области D. При этом в первом случае продолжение, вообще говоря, будет не обязательно единственным, во втором же случае оно единственно.*

Для иллюстрации «недоразумений» возникающих при использовании численных решений дифференциальных уравнений без учета теорем существования рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Требуется, используя численный метод интегрирования Эйлера с итерационной схемой

$$y_{i+1} = y_i + h\cdot f(x_i, y_i)$$

с шагом h =0,1, решить начальную задачу

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y(-1) = 0{,}21 \qquad (3)$$

на отрезке [–1, 3].

Решение. (с помощью пакета Mathcad)

$$f(x,y) := -\left(\frac{x}{y}\right) \quad x0 := -1 \quad x1 := 3 \quad y0 := 0.21 \quad h := 0.1 \quad i := 0..35$$

```
euler(x0,y0,h,x1,fn) := | n ← (x1 − x0)/h
                        | z[0,0] ← x0
                        | z[0,1] ← y0
                        | for i ∈ 1..n
                        |   | z[i,0] ← x0 + i·h
                        |   | z[i,1] ← z[i−1,1] + h·fn(z[i−1,0], z[i−1,1])
                        | z
```

A := euler(x0,y0,h,x1,f)

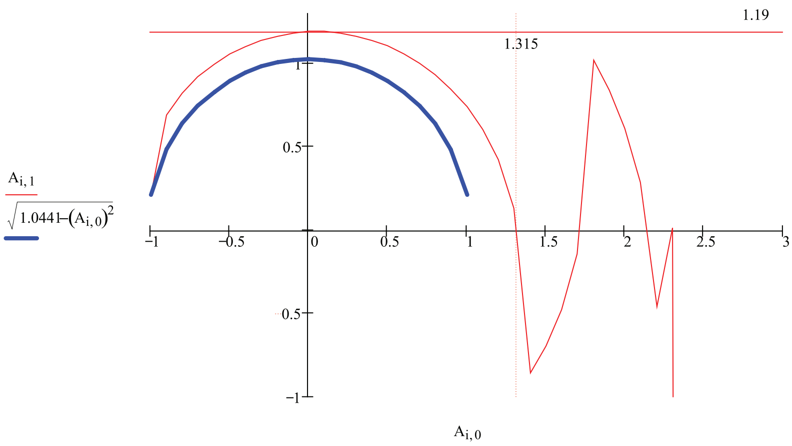

Рис. 1.
Тонкой линией показано приближенное решение, толстой – истинное решение

Обратимся теперь к теореме существования. Для исследуемой начальной задачи (3) $f(x,y)=-\dfrac{x}{y}$ функция f, определяемая равенством, определена и непрерывна во всей плоскости (x, y) за исключением точек оси абсцисс.

Таким образом, в соответствии с теоремой существования существует решение $y(x)$ начальной задачи (3), определенное на некотором интервале, содержащем точку $x_0=-1$, и это решение по теореме о продолжении может быть продолжено до значения, близкого к значению $y(x) = 0$. В результате численного интегрирования получаем решение начальной задачи (3) на некотором интервале (a, b), где $a < -1$; $1{,}3 < b < 1{,}32$. Однако, учитывая, что это уравнение с разделяющимися переменными, можно аналитически найти частное решение, удовлетворяющее начальной задаче (3)

$$\int_{0,21}^{0} \eta d\eta = \int_{-1}^{x} \xi d\xi.$$

Интегрируя, получаем, что

$$y=\sqrt{1{,}0441-x^2}.$$

Отсюда следует, что решение начальной задачи (3) существует только для

$$|x| < \sqrt{1{,}0441} \approx 1{,}0218.$$

Оказывается, обращение к теореме существования (и к теореме о продолжении) позволило отсечь отрезок (приблизительно [1,315; 5]), на котором решение исходной начальной задачи (3) заведомо не существует. Одно же только численное интегрирование приводит к ошибочному результату. Дело здесь в том, что при приближении решения $y = y(x)$ к оси O_x угол наклона кривой приближается к 90°. Поэтому пока аргумент x изменяется на величину 0,1 значение y успевает перескочить ось O_x, и мы попадаем на интегральную кривую, отличную от исходной. А это происходит потому, что метод Эйлера учитывает угол наклона только в текущей точке.

Пример 2. Используя метод Эйлера, а затем метод Эйлера-Коши, с шагом $h = 0{,}1$ и итерационной схемой

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}\cdot\left(f(x_i,y_i)+f\left(x_{i+1},y^*_{i+1}\right)\right),$$

где

$$y^*_{i+1}=y_i+h\cdot f(x_i,y_i),$$

решить начальную задачу

$$y'=3\cdot x\cdot\sqrt[3]{y},\quad y(-1)=-1, \tag{4}$$

на промежутке [–1, 1].

Решение. На базе Mathcad методом Эйлера, а затем методом Эйлера-Коши будем иметь:

$f(x,y) := 3\cdot x\cdot\sqrt[3]{y}$ $\quad x0 := -1 \quad x1 := 1 \quad y0 := -1 \quad h := 0.1 \quad i := 0..21$

```
euler(x0,y0,h,x1,fn) := | n ← (x1 − x0)/h
                        | z[0,0 ← x0
                        | z[0,1 ← y0
                        | for i ∈ 1..n
                        |   | z[i,0 ← x0 + i·h
                        |   | z[i,1 ← z[i−1,1 + h·fn(z[i−1,0, z[i−1,1)
                        | z
```

A := euler(x0, y0, h, x1, f)

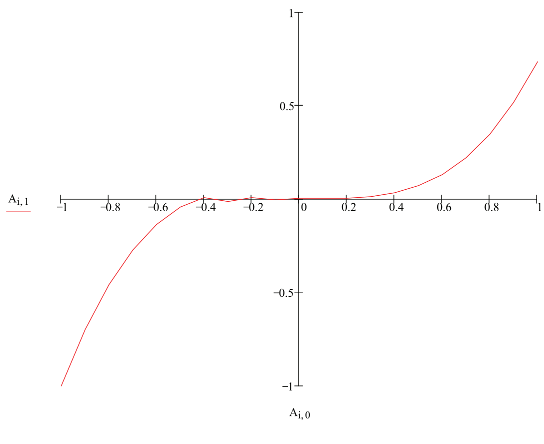

Рис. 2

Получили чертеж (рис. 3) отличный от чертежа, изображенного на (рис. 2). Чтобы лучше разобраться в причине расхождения в результатах, проинтегрируем исходную начальную задачу. Разделяя переменные, имеем

$$\int_{-1}^{y} \eta^{-1/3} d\eta = 3\cdot\int_{-1}^{x} \xi d\xi$$

или, окончательно, $y=\pm x^3$.

Становится понятно, что решение по методу Эйлера приближает функцию $y_1(x) = x^3$, а по улучшенному методу Эйлера – функцию

$$y_2(x)=\begin{cases}x^3, & \text{если } x\le 0,\\ -x^3, & \text{если } x>0.\end{cases}$$

При этом как, y_1 так и y_2 являются решениями начальной задачи (4), а значит, для рассматриваемой на промежутке [–1; 1] начальной задачи имеет место неединственность.

Обращаясь теперь к теореме существования и единственности, отметим, что, так как функция f, заданная равенством, непрерывна во всей плоскости (x, y), то из теоремы существования следует, что существует решение начальной задачи (4), определенное на некотором промежутке, содержащем точку $x_0 = -1$, и это решение по теореме о продолжении может быть продолжено на любой промежуток. Далее, поскольку

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x\cdot y^{\frac{-2}{3}},$$

то функция

$$f(x,y)=3\cdot x\cdot\sqrt[3]{y}$$

удовлетворяет условию Липшица по переменной y в любой области, не содержащей точки оси O_x. Если же область содержит точку оси O_x, то нетрудно показать, что в ней указанная выше функция условию Липшица не удовлетворяет. Поэтому из теоремы существования и единственности (и теоремы о продолжении) следует, что в данном случае решение начальной задачи может быть продолжено единственным образом, по крайней мере, до оси O_x. Но поскольку прямая $y = 0$ является особой интегральной прямой для дифференциального уравнения

$$y' = 3 \cdot x \cdot \sqrt[3]{y},$$

то, как только y станет равным нулю решение начальной задачи (4) не может быть единственным образом продолжено за точку $O(0, 0)$.

```
f(x,y) := 3·x·∛y

x0 := −1
x1 := 1
y0 := −1
h := 0.1
i := 0..20

A := eulercohe(x0, y0, h, x1, f)

eulercohe(x0, y0, h, x1, fn) := | n ← (x1 − x0)/h
                                | z[0,0] ← x0
                                | z[0,1] ← y0
                                | for i ∈ 1..n
                                |    | z[i,0] ← z[0,0] + i·h
                                |    | Z ← z[i−1,1] + h·fn(z[i−1,0], z[i−1,1])
                                |    | z[i,1] ← z[i−1,1] + h·(fn(z[i−1,0], z[i−1,1]) + fn(z[i,0], Z))/2
                                | z
```

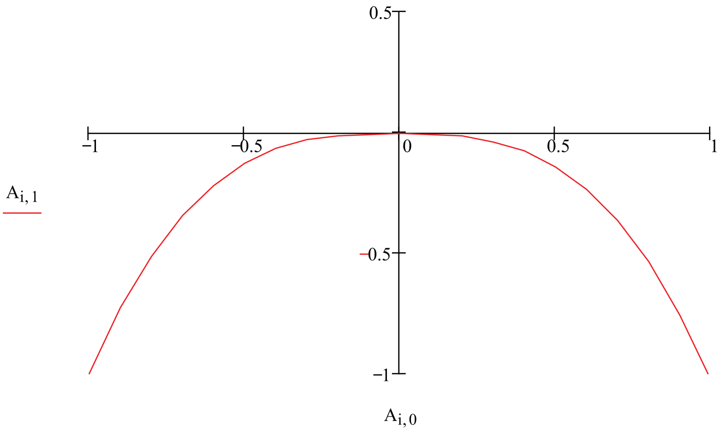

Рис. 3

Итак, обращение в данном случае к теореме существования и единственности (и теореме о продолжении) позволило разобраться в результатах численного интегрирования. Если речь идет о единственном на промежутке [–1; 1] решении начальной задачи (4), то оно существует и определено лишь на отрезке [–1; 0]. В общем же случае таких решений несколько.

Список литературы

1. Roberts C.E. Jr. Why teach existence and uniqueness theorems in the first course in ordinary differential equations? // Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. – 1976. – Vol. 7, № 1. – P. 41–44.

УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С МАРКОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Беляков Е.В., Короткова Н.Н.

Волжский политехнический институт, филиал Волгоградского государственного технического университета, Волжский, e-mail: samvel767@mail.ru

Примерами случайных процессов являются, например, шум в электронных приборах, случайные флуктуации различных величин в системах управления, движение цен на фондовой бирже. Реалистичное описание каждой из этих систем нельзя осуществить с помощью полностью детерминированных моделей. Существуют многочисленные динамические системы, структура и параметры которых изменяются случайным скачкообразным образом, например, многорежимные аэрокосмические аппараты, сложные производственно-технологические системы, экономические процессы и другие системы с возможными нарушениями. Такие системы обычно имеют конечное или счетное множество режимов функционирования (структурных состояний), в каждом из которых система описывается детерминированным или стохастическим дифференциальным уравнением. Между режимами в случайные моменты времени происходят скачкообразные переходы, описываемые однородной цепью Маркова, состояния которой соответствуют режимам системы.

Задача управления линейной стохастической системой с квадратическим функционалом стоимости решена в статье [1] методом динамического программирования с использованием принципа оптимальности Беллмана. Нами тот же результат получен с помощью «выделения полного квадрата» в функционале стоимости.

Этот метод предполагается в дальнейшем использовать и при решении других задач.

Список литературы

1. Fragoso M.D. Discrete-time jump LQG problem // International journal of System Science. – 1989. – Vol. 20, № 12. – P. 2539-2545.