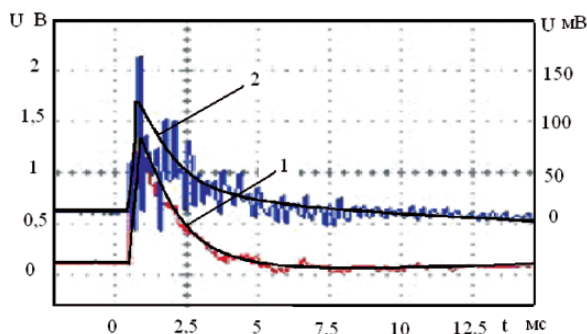




Осциллограммы аксиальной (кривая 1) и радиальной (кривая 2) компонент возмущения разрядного тока

Список литературы

1. Суркаев А.Л., Кульков В.Г. Исследование импульсного механического нагружения волноводного пьезодатчика давления // Акустический журнал. – 2006. – Т. 52, № 2. – С. 218–222.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КONTИНУАЛЬНЫХ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ

Гирлин С.К., Щербина Е.П.

Институт экономики и управления РВУЗ «Крымский
гуманитарный университет», Ялта,
e-mail: kate31121990@gmail.com

Постановка проблемы: исследовать вопросы существования и единственности решения системы нелинейных интегральных уравнений, описывающих взаимодействие двух континуальных развивающихся систем и внешней среды, а также поставить некоторые оптимизационные задачи такого взаимодействия.

Актуальность поставленной проблемы. Решение поставленной проблемы позволяет математически описывать динамику взаимодействия континуальных развивающихся систем, в качестве которых могут рассматриваться многие очень сложные реальные системы (например, экономические и экологические). Кроме того, это позволяет ставить и решать различные оптимизационные задачи взаимодействия континуальных развивающихся систем.

Анализ последних исследований и публикаций. Академик В.М. Глушков для описания функционирования различных развивающихся систем (РС) предложил использовать интегральные уравнения вольтерровского типа с неизвестными функциями в нижних пределах интегралов [1]. Одна из главных особенностей интегральных моделей В.М. Глушкова заключается в том, что вся развивающаяся система, которую эти модели описывают, разбита на две подсистемы: одна из них выполняет внутреннюю функцию, заключающуюся в совершенствовании самой системы, а вторая осуществляет внешнюю (основную) функцию системы. Согласно этому все обобщенные продукты (элементы) системы подразделяются на продукты первого и второго рода: материальное, энергетическое и информационное обеспечение внутренней и внешней функций называются продуктами соответственно первого и второго рода. В качестве примеров продуктов первого и второго рода можно привести соответственно рабочие места и продукты потребления в макроэкономической системе. Если же внутренних и внешних функций в системе несколько, то имеет смысл рассматривать многопродуктовые РС. Однако для изучения некоторых систем (например, процессов в биосфере) целесообразно рассматривать континуум

продуктов. Суть континуальных моделей В.М. Глушкова состоит в том, что осуществляется упорядочивание бесконечного числа номеров продуктов, выполняющих внутренние и внешние функции. Все эти номера располагаются на некотором отрезке $[0, U]$, причем продукту с наименьшим номером на этом отрезке ставится в соответствие число 0, а продукту с наибольшим номером – число U (в дальнейшем продукт будет отождествляться с его номером $u \in [0, U]$). В [2] были получены достаточные условия существования единственного решения системы уравнений континуальной модели РС, в которой непосредственное воздействие внешней среды на РС не учитывалось: все продукты создавались в самой системе, извне в РС продукты не поступали. В [3] на основе идей [4] обобщены результаты [2] на тот случай, когда в РС продукты могут появляться не только в результате их создания в самой системе, но и в результате поступления в РС из внешней среды уже созданных продуктов.

В [4] была построена интегральная модель взаимодействия двухпродуктовых развивающихся систем и внешней среды, в которой транспортировка продуктов между системами могла быть мгновенной (что осложнило как саму модель, так и ее исследование). Естественно возникла идея упростить уравнения модели, учитывая отличие от нуля времени транспортировки продуктов от одной системы к другой.

Цель статьи состоит в решении поставленной выше проблемы.

Изложение основного материала. Будем считать, что в системе продукты появляются в результате как поступления извне в систему уже созданных продуктов, так и воссоздания продуктов в самой системе, и что появление некоторого нового продукта $u_1 \leq U$ зависит лишь от уже появившихся ранее продуктов $u < u_1$ и никак на него не влияют еще не появившиеся продукты $u_1 < u \leq U$. Будем предполагать, что одновременно с возрастанием u (при котором происходит появление новых продуктов) происходит процесс ликвидации ненужных продуктов по закону $b(t, u)$. В частности, начиная с некоторого момента времени t_i , процесс ликвидации ненужных продуктов может прекращаться, в этом случае для $t \geq t_i$ функция $b(t, u) = u_i = \text{const}$, где u_i – наименьший из существующих в момент t_i продуктов. Далее будет рассматриваться случай, когда $b(t, u) = u_0 = \text{const}$ в области $G_1 = \{(t, u) : t_0 \leq t \leq T, u_0 \leq u \leq U\}$. Обозначим $G = \{(t, u) : 0 \leq t \leq T, 0 \leq u \leq U\}$. Рассмотрим следующую систему уравнений взаимодействия континуальных РС относительно неизвестных функций $m_i(t, u)$, $a_i(t, u)$ и $c_i(t, u)$:

$$m_i^*(t, u) = \int_{a_i(t, u)}^t d\tau \int_{u_0}^u \alpha_i(t, u; \tau, v) y_i(u; \tau, v) m_i(\tau, v) dv; \quad (1)$$

$$c_i^*(t, u) = \int_{a_i(t, u)}^t d\tau \int_{u_0}^u \beta_i(t, u; \tau, v) (1 - y_i(u; \tau, v)) m_i(\tau, v) dv \quad (2)$$

$$m_i(t, u) = \lambda_i(t, u) m_i^*(t, u) + (1 - \lambda_{3-i}(t - d, u)) m_{3-i}^*(t - d, u) + k_c z_i(t, u) x_i(t, u) f(t, u); \quad (3)$$

$$c_i(t, u) = \mu_i(t, u) c_i^*(t, u) + (1 - \mu_{3-i}(t - d, u)) c_{3-i}^*(t - d, u) + z_i(t, u) (1 - x_i(t, u)) f(t, u); \quad (4)$$

$$P_i(t, u) = \int_{a_i(t, u)}^t d\tau \int_{u_0}^u m_i(\tau, v) dv, \quad (5)$$

$$0 \leq x_i, y_i, z_i, \lambda_i, \mu_i \leq 1, \quad x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = z_1 + z_2 = 1, \quad 0 \leq a_i(t, u) \leq t, \quad (6)$$

где $f(t, u)$ – скорость изменения (по u) скорости (по t) поступления извне в обе развивающиеся системы u -х продуктов первой группы, предназначенных для выполнения внутренних функций PC ; $z_i(t, u) f(t, u)$ – скорость изменения (по u) скорости (по t) поступления извне в PC с номером t (PC_i) u -х продуктов первой группы, предназначенных для выполнения внутренних функций PC_i ; $0 \leq z_i(t, u) \leq 1$; $m_i^*(t, u)$ – скорость изменения (по u) скорости (по t) создания в PC_i u -х продуктов первой группы, предназначенных для выполнения внутренних функций PC_i ($m_i^*(t, u) = 0$ для $t > t_0$ и $u > u_0$); $m_i(t, u)$ – скорость изменения (по u) скорости (по t) появления в PC_i u -х продуктов первой группы, предназначенных для выполнения внутренних функций PC_i ; $y_i(u; \tau, v)$ – доля v -х продуктов $m_i(\tau, v)$, идущих в момент τ на воссоздание в момент t продуктов $m_i^*(t, u)$; $k_c z_i(t, u) (1 - x_i(t, u)) f(t, u)$ – скорость изменения (по u) скорости (по t) поступления извне в PC_i u -х продуктов второй группы, предназначенных для выполнения внешних функций PC_i ; k_c – коэффициент согласования размерностей продуктов первого и второго рода (продукты первого рода и внешний ресурс предполагаются одной размерности); $c_i^*(t, u)$ – скорость изменения (по u) скорости (по t) создания в PC_i u -х продуктов второй группы, являющихся результатом выполнения внешних функций PC_i ; $c_i(t, u)$ – скорость изменения (по u) скорости (по t) появления в PC_i u -х продуктов второй группы, являющихся результатом выполнения внешних функций PC_i ; $P_i(t, u)$ – общее количество u -х продуктов первой группы, функционирующих в PC_i в момент времени t ; $\alpha_i(t, u; \tau, v)$ – показатель эффективности создания u -го продукта первой группы в момент времени t , выполняющего в PC_i внутренние функции (иначе говоря, это количество u -го продукта типа $m_i^*(t, u)$, создаваемого в единицу времени, начиная с момента в t , в расчете на единицу всех продуктов типа $y_i(u; \tau, v) m_i(\tau, v)$ для $v \leq u$); $\beta_i(t, u; \tau, v)$ – показатель эффективности создания u -го продукта второй группы в момент времени t , выполняющего в PC_i внешние функции (иначе говоря, это количество u -го продукта типа $c_i^*(t, u)$, создаваемого в единицу времени, начиная с момента в t , в расчете на единицу всех продуктов типа $(1 - y_i(u; \tau, v)) m_i(\tau, v)$ для $v \leq u$); $a_i(t, u)$ – времен-

ная граница ликвидации неэффективных технологий создания в PC_i u -х продуктов первой и второй групп (иначе говоря, $[a_i(t, u), t]$ – временной промежуток, на котором создаются u -е продукты первой и второй групп для их использования в PC_i в момент времени t , причем $0 \leq a_i(t, u) \leq t$); d – время транспортировки продуктов из одной системы в другую, $d = \text{const} > 0$; на отрезке $[0, t_0]$ известна так называемая начальная предыстория: на этом временном промежутке начальной предыстории $m_i(t, u) \equiv m_{i,0}(t, u)$ и $y_i(u; \tau, v) \equiv y_{i,0}(u; \tau, v)$ – заданные функции (заданные на предыстории функции будем обозначать теми же буквами с индексом «0»); все функции по определению будем считать неотрицательными; t_0 – момент начала моделирования взаимодействия (прогнозирования динамики взаимодействия) PC_i .

$$t_0 > 0 = \min \left\{ \min_u a_1(t_0 - d, u), \min_u a_2(t_0 - d, u) \right\},$$

$$0 \leq u_0 \leq u \leq U, \quad 0 < t_0 \leq t \leq T < +\infty, \quad i = 1, 2.$$

Теорема 1. Пусть:

- 1) $\alpha_i, \beta_i, z_i x_i f, z_i (1 - x_i) f, P_i$ заданные, положительные и непрерывные в своих областях определения функции, причем функция P_i отделена от нуля, т.е. $P_i \geq \rho = \text{const} > 0$;
- 2) y_i – заданная и кусочно-непрерывная в своей области определения функция;
- 3) функция P_i непрерывно дифференцируема по первому аргументу;
- 4) функция $m_{i,0}$ на начальной предыстории $[0, t_0]$ положительна, $i = 1, 2$. Тогда существует единственное решение m_i, c_i, a_i системы уравнений и неравенств (1)-(6) в области G_1 , причем в этой области функции m_i, c_i непрерывны, а функция a_i непрерывно дифференцируема, $i = 1, 2$.

Доказательство. Везде далее полагаем $i = 1, 2$. Разобьем область интегрирования в уравнениях (1) и (5) на две подобласти: начальную предысторию, в которой функции

$$m_i(t, u) \equiv m_{i,0}(t, u) \quad \text{и} \quad y_i(u; \tau, v) \equiv y_{i,0}(u; \tau, v)$$

заданы, и область G_1 . Тогда эти уравнения можно переписать в виде

$$m_i^*(t, u) = \int_{a_i(t, u)}^{t_0} d\tau \int_{u_0}^u \alpha_i(t, u; \tau, v) y_{i,0}(u; \tau, v) m_{i,0}(\tau, v) dv + \quad (4)$$

$$+ z_i(t, u) x_i(t, u) f(t, u) + \int_{t_0}^t d\tau \int_{u_0}^u \alpha_i(t, u; \tau, v) y_i(u; \tau, v) m_i(\tau, v) dv;$$

$$P_i(t, u) = \int_{a_i(t, u)}^{t_0} d\tau \int_{u_0}^u m_{i,0}(\tau, v) dv + \int_{t_0}^t d\tau \int_{u_0}^u m_i(\tau, v) dv, \quad (5)$$

где $a_i(t, u) \leq t_0, t \in [0, t_1]$, момент t_1 определим ниже. Обозначим

$$M_{i,0}(a, t, u) = \lambda_i(t, u) \int_{a_i(t, u)}^{t_0} d\tau \int_{u_0}^u \alpha_i(t, u; \tau, v) y_{i,0}(u; \tau, v) m_{i,0}(\tau, v) dv; \quad (6)$$

$$P_{i,0}(a_i, u) = \int_{a_i(t,u)}^{t_0} d\tau \int_{u_0}^u m_{i,0}(\tau, v) dv;$$

$$x_i(t, u) = P_i(t, u) - \int_{t_0}^t d\tau \int_{u_0}^u m_i(\tau, v) dv.$$

Очевидно,

$$P_{i,0}(a_i, u) = (x_i, t)u,$$

откуда получаем, что

$$a_i(t, u) = P_{i,0}^{-1}(x_i(t, u), u).$$

(7)

Если функция $P_{i,0}(a_i, u)$ непрерывно дифференцируема по первому аргументу и

$$\frac{\partial P_{i,0}(a_i, u)}{\partial a_i} \neq 0,$$

то функция $a_i(t, u)$ будет однозначной и непрерывно дифференцируемой. Эти условия выполняются, если $m_{i,0}(t, u)$ положительна и

$$\int_{u_0}^u m_{i,0}(a, v) dv \neq 0, \quad i = 1, 2$$

Воспользовавшись равенствами (6) и (7), уравнение (3) перепишем в виде

$$m_i(t, u) = \lambda_i(t, u) \int_{t_0}^t d\tau \int_{u_0}^u \alpha_i(t, u; \tau, v) y_i(u; \tau, v) m_i(\tau, v) dv + F_i(t, u) + F_{i,0}(t, u) + R_{i,0}(x_i, t, u), \quad (8)$$

где

$$F_{i,0}(t, u) = (1 - \lambda_{3-i}(t - d, u)) m_{3-i}^*(t - d) + z_i(t, u) x_i(t, u) f(t, u),$$

$$R_{i,0}(x_i, t, u) = M_{i,0}(P_{i,0}^{-1}(x_i, u), t, u), \quad t \in [0, t_1].$$

Применив правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{i,0}(x_i, t, u)}{\partial x_i} &= \frac{\partial M_{i,0}}{\partial P_{i,0}^{-1}} \frac{\partial P_{i,0}^{-1}}{\partial x_i} = \frac{\partial M_{i,0}}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial P_{i,0}^{-1}}{\partial a_i} = \\ &= \frac{\lambda_i(t, u) \int_{u_0}^u (\alpha_i(t, u; a_i, v) v(y_{i,0}; u, a_i) v(m_{i,0}, a_i) v dv)}{\int_{u_0}^u m_{i,0}(a, v) dv} \leq L, \end{aligned}$$

где $u_0 \leq v \leq U$, $t_0 \leq t \leq T$, $0 \leq a_i \leq T$. Поэтому функция $R_{i,0}(x_i, t, u)$ по первому аргументу удовлетворяет условию Липшица с константой L .

Итак, система уравнений (1), (3), (5) сведена к одному нелинейному интегральному уравнению относительно неизвестной $m_i(t, u)$:

$$m_i(t, u) = A_{i,0} m_i(t, u) \equiv \lambda_i(t, u) \int_{t_0}^t d\tau \int_{u_0}^u \alpha_i(t, u; \tau, v) y_i(u; \tau, v) m_i(\tau, v) dv + F_{i,0}(t, u) + R_{i,0}(P_i(t, u) - \int_{t_0}^t d\tau \int_{u_0}^u m_i(\tau, v) dv, t, u), \quad (9)$$

$u \in [u_0, U]$, $t \in [t_0, t_1]$.

Введем обычную норму в пространстве непрерывных функций:

$$\|m_i(t, u)\| = \max_{t, u} |m_i(t, u)|.$$

С помощью метода математической индукции можно доказать, что на $[t_0, t_1]$

$$\|A_{i,0}^n m_{i,[1]}(t, u) - A_{i,0}^n m_{i,[2]}(t, u)\| \leq \frac{[(L + M)(t_1 - t_0)(U - u_0)]^n}{(n!)^2} \|m_{i,[1]}(t, u) - m_{i,[2]}(t, u)\|,$$

где

$$M = \max_{i, t, u, \tau, v} (\alpha_i(t, u; \tau, v) y_i(u; \tau, v)), \quad u_0 \leq \tau \leq u \leq U, \quad t_0 \leq \tau \leq t \leq T.$$

Число n можно выбрать настолько большим, что при любых конечных значениях постоянных L , M , t_0 , t_1 , u_0 , U будет выполняться неравенство

$$\frac{[(L + M)(t_1 - t_0)(U - u_0)]^n}{(n!)^2} < 1.$$

Следовательно, оператор $A_{i,0}^n$ при достаточно большом n будет сжимающим. В силу обобщенного принципа сжимающих отображений [5, с. 82] существует единственное решение уравнения (9), которое можно найти методом последовательных приближений:

$$m_i(t, u) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m_{i(k)}(t, u),$$

$$\begin{aligned} m_{i,(1)}(t, u) &= \lambda_i(t, u) \int_{a_i(t, u)}^{t_0} d\tau \int_{u_0}^u \alpha_i(t, u; \tau, v) y_{i,0}(u; \tau, v) m_{i,0}(\tau, v) dv + z_i(t, u) x_i(t, u) f(t, u) + \\ &+ (1 - \lambda_{3-i}(t - d, u)) \int_{a_{3-i}(t-d, u)}^{t_0} d\tau \int_{u_0}^u \alpha_i(t - d, u; \tau, v) y_{3-i,0}(u; \tau, v) m_{3-i,0}(\tau, v) dv; \\ m_{i,(k+1)}(t, u) &= A_{i,0} m_{i(k)}(t, u), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Если $a_i(t, u) \geq 0$ то $(t, u) \in G_1$ и равенство выполняется по крайней мере для одной точки G_1 . Найдутся некоторые такие моменты времени $t_{1,u}^1$ и $t_{1,u}^2$ в общем случае разные для каждого продукта u , что

$$a_1(t_{1,u}^1, u) = t_0, \quad a_2(t_{1,u}^2, u) = t_0.$$

Если

$$\min \left\{ \min_u t_{1,u}^1, \min_u t_{1,u}^2, t_0 + d \right\} = t_1 \geq T,$$

то искомое решение в области G_1 можно найти методом последовательных приближений по формуле (10). В противном случае на втором шаге за предысторию выбирается отрезок $[0, t_1]$ и аналогично предыдущему система уравнений (1), (3), (5) сводится к одному

$$\|A_{ij}^n m_{i[1]}(t, u) - A_{ij}^n m_{i[2]}(t, u)\| \leq \frac{[(L+M)(t_{j+1} - t_j)(U - u_0)]^n}{(n!)^2} \|m_{i[1]}(t, u) - m_{i[2]}(t, u)\|,$$

то при достаточно большом n оператор A_{ij}^n будет сжимающим.

Функция $a_i(t, u)$ на $[t_j, t_{j+1}]$ определяется из формул

$$a_i(t, u) = P_{i,j}^{-1}(x_i(t, u), u);$$

$$P_{i,j}(a_i, u) = \int_{a_i(t, u)}^{t_j} d\tau \int_{u_0}^u m_{i,j}(\tau, v) dv = x_i(t, u);$$

$$x_i(t, u) = P_i(t, u) - \int_{t_0}^t d\tau \int_{u_0}^u m_i(\tau, v) dv,$$

где $a_i(t, u) \leq t_j$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$.

нелинейному уравнению вида (9), в котором вместо t_0 нужно будет поставить t_1 , $t \in [t_1, t_2]$,

$$\min \left\{ \min_u t_{2,u}^1, \min_u t_{2,u}^2, t_1 + d \right\} = t_2.$$

Пошаговый процесс решения на отрезке $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, N-1$, продолжается до тех пор, пока не выполнится неравенство $t_{N-1} < T \leq t_N$, где

$$t_N = \min \left\{ \min_u t_{N,u}^1, \min_u t_{N,u}^2, t_{N-1} + d \right\},$$

$$a_1(t_{N,u}^1, u) = t_{N-1}, \quad a_2(t_{N,u}^2, u) = t_{N-1},$$

$$u_0 \leq u \leq U.$$

Так как на каждом отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ выполняется неравенство

Функция $a_i(t, u)$ на рассматриваемом отрезке будет однозначной, если уже найденное положительно на $[0, t_j]$. А это выполняется при положительности $m_i(t, u)$, $z_i(t, u)$, $x_i(t, u)$, $f_i(t, u)$ и $\cdot$. Итак, при всех перечисленных условиях уравнение (9) и получающееся уравнение такого же типа имеет единственное решение в области G_1 (это означает, что и система уравнений (1), (3), (5) имеет в указанной области единственное решение), которое можно найти по шагам методом последовательных приближений по схеме:

$$m_i(t, u) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m_{i,(k)}(t, u);$$

$$m_{i,(1)}(t, u) = \lambda_i(t, u) \int_{a_i(t, u)}^{t_j} d\tau \int_{u_0}^u \alpha_i(t, u; \tau, v) y_{i,j,0}(u; \tau, v) m_{i,j,0}(\tau, v) dv +$$

$$+ z_i(t, u) x_i(t, u) f_i(t, u) + (1 - \lambda_{3-i}(t - d, u)) \int_{a_{3-i}(t-d, u)}^{t_j} d\tau \int_{u_0}^u \alpha_{3-i}(t - d, u; \tau, v) y_{3-i,0}(u; \tau, v) m_{3-i,0}(\tau, v) dv;$$

$$m_{i,(k+1)}(t, u) = \lambda_i(t, u) \int_{t_j}^t d\tau \int_{u_0}^u \alpha_i(t, u; \tau, v) y_{i,j}(u; \tau, v) m_{i,j,(k)}(\tau, v) dv +$$

$$+ F_i(t, u) + R_j(P_i(t, u) - \int_{t_j}^t d\tau \int_{u_0}^u m_{i,(k)}(\tau, v) dv, t, u);$$

$$F_{ij}(t, u) = (1 - \lambda_{3-i}(t - d, u)) \int_{a_{3-i}(t-d, u)}^{t_j} d\tau \int_{u_0}^u \alpha_{3-i}(t - d, u; \tau, v) y_{3-i}(u; \tau, v) m_{3-i,j,0}(\tau, v) dv,$$

где функции $a_{3-i} m_{j,0} = m_{ij}$ уже найдены на предыстории $[0, t_j]$ $u_0 \leq u \leq U$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, N-1$.

Очевидно, что, отыскав функции $m_i(t, u)$ и $a_i(t, u)$, функцию $c_i(t, u)$ можно найти по формуле (2) и (4).

Осталось показать, что последовательность моментов времени $\{t_j\}$, $j = 0, N-1$, достигает T за конечное число шагов.

Из уравнения (11) получаем неравенство

$$m_i(t, u) \leq \overline{\alpha_{ij0}}(t, u) \int_0^{t_j} d\tau \int_{u_0}^u m_i(\tau, v) dv + f(t, u) + \overline{\alpha_{ij}}(t, u) \int_{t_j}^t d\tau \int_{u_0}^u m_i(\tau, v) dv, \quad (12)$$

где

$$\overline{\alpha_{ij0}}(t, u) = \max_{\tau, v} \alpha_i(t, u; \tau, v), \quad 0 \leq \tau \leq t_j, u_0 \leq v \leq u \leq U,$$

$$\overline{\alpha_{ij}}(t, u) = \max_{\tau, v} \alpha_i(t, u; \tau, v), \quad t_j \leq \tau \leq t \leq t_{j+1}, u_0 \leq v \leq u \leq U,$$

$t \in [t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, N-1$.

Обозначив

$$g_i(t, u) = f(t, u) + \overline{\alpha_{ij0}}(t, u) \int_0^{t_j} d\tau \int_{u_0}^u m_{ij}(\tau, v) dv$$

и воспользовавшись [2], из (12) получаем следующее ограничение на функцию $m_i(t, u)$:

$$m_i(t, u) \leq \overline{\alpha_{ij}}(t, u) \int_{t_j}^t d\tau \int_{u_0}^u g_i(\tau, v) \exp \left[\int_{\tau}^t d\tau_1 \int_v^u \overline{\alpha_{ij}}(\tau_1, v_1) dv_1 \right] dv + g_i(t, u) \quad (13)$$

Так как функции $\alpha_i(t, u; \tau, v)$ и $m_i(t, u)$ непрерывны, из неравенства (13) следует ограниченность функции $m_i(t, u)$ на любом конечном отрезке:

$$m_i(t, u) \leq d_0 = \text{const} < +\infty, i = 1, 2.$$

А в этом случае из равенства (3) и условия 1) теоремы вытекает

$$0 < \rho \leq P_i(t_{j+1}, u) \leq \int_{t_j}^{t_{j+1}} d\tau \int_{u_0}^u m_i(\tau, v) dv \leq d_0(t_{j+1} - t_j)(U - u_0),$$

откуда следует, что $t_{j+1} - t_j \geq d_1$, где

$$d_1 = \frac{\rho}{d_0(U - u_0)} = \text{const} > 0, j = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно момент T достигим за конечное число шагов N . Теорема доказана.

Замечание 1. С помощью введения новой переменной

$$n_i(t, u) = m_i(t, u) - x_i(t, u)z_i(t, u)f(t, u), (t, u) \in G_i,$$

можно доказать справедливость теоремы 1 и для случая, когда функции $z_i(t, u)$, $x_i(t, u)$, кусочно непрерывны на G_i , $0 \leq x_i, z_i \leq 1$.

Замечание 2. Заданная функция $P(t, u)$, вообще говоря, не может быть произвольной. Для существования решения рассматриваемой системы уравнений она должна быть определенным образом ограничена сверху. Оценка эта (зависящая от предыстории, функции f и способа задания функции α_i) может быть получена совершенно аналогично [2].

Замечание 3. Положив в условиях теоремы 1 $f(t, u) \equiv 0$, $\lambda_i = \mu_i \equiv 1$, $i = 1, 2$, получим теорему, доказанную в [2].

Пусть $q_i(t, u)$ – функция дисконта продуктов второго рода, т.е. $q_i(t, u) > 0$ и убывает с ростом t на $[t_0, T]$, $u \in [u_0, U]$ (с помощью функции дисконта учитывается, что ценность для потребителя продуктов второго рода со временем падает).

Поставим следующие четыре оптимизационные задачи взаимодействия РС (аналогичные [1, с. 64-66]). В условиях теоремы 1 среди всех заданных функций

$$\{x_i, y_i, z_i, \lambda_i, \mu_i\}_{i=1}^2$$

найти такие функции $x_p, y_p, z_p, \lambda_p, \mu_p$ (и зависящие от них функции m_p, a_p, c_p , $i = 1, 2$), для которых

$$1. I_1 = \max_{\{x_i, y_i, z_i, \lambda_i, \mu_i\}_{i=1}^2} \sum_{i=1}^2 \int_{t_0}^T q_i(t, u)c_i(t, u)dt, u_0 \leq u \leq U, \text{ (задача кооперативного взаимодействия).}$$

$$2. I_2 = \max_{x_1, y_1, z_1, \lambda_1, \mu_1} \min_{x_2, y_2, z_2, \lambda_2, \mu_2} \int_{t_0}^T (q_1(t, u)c_1(t, u) - q_2(t, u)c_2(t, u))dt, u_0 \leq u \leq U, u_0 \leq u \leq U \text{ (задача противоборствующего взаимодействия).}$$

$$3. I_3 = \left\{ \{x_1, y_1, x_2, y_2\} : \int_{t_0}^T (q_1(t, u)c_1(t, u) - q_2(t, u)c_2(t, u))dt > 0 \right\}, u_0 \leq u \leq U \text{ (задача определения условий лидерства).}$$

$$4. I_4 = T - t_0 = \text{extr}_{\{x_i, y_i, z_i, \lambda_i, \mu_i\}_{i=1}^2} \text{ при условии } \int_{t_0}^T q_i(t, u)c_i(t, u)dt \in C_i^*; \int_{t_0}^T m_i(t, u)dt \in M_i^*,$$

где C_i^* , M_i^* – заданные множества значений, $i = 1, 2$ (адаптационная и гомеостазисная задача или задача на быстроедействие и на долгосрочное существование: требуется найти экстремальное значение времени достижения заданной области).

Решение, например, первой оптимизационной задачи можно интерпретировать как достижение рекорда внешней общей результирующей функции двух PC_i на заданном временном (плановом) периоде $[t_0, T]$ за счет выбора наилучшего и сбалансированного распределения внешнего ресурса между двумя PC_i (с помощью функций z_i), за счет обмена PC_i готовыми продуктами первого и второго рода (с помощью функций λ_i, μ_i), а также перераспределения внутренних (с помощью функции y_i) и внешних (с помощью функции x_i) ресурсов системы между подсистемами A_i и B_i (в макроэкономике, например, между группой производства средств производства и группой производства предметов потребления) в каждой системе PC_i с номером $i = 1, 2$.

Замечание 4. Взаимодействие PC_p для которого $\lambda_i = \mu_i \equiv 1$, и $z_i = z_i(t)$ заданы, $i = 1, 2$, и не зависят от x_1, y_1, x_2, y_2 , будем называть пассивным.

Как отмечается в [10, с. 475], для любой функции $F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ справедлива формула

$$\inf_X (F)X = \inf_{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}} \inf_{x_n} F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n),$$

где $X = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$.

Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Для пассивного взаимодействия

$$I_1 = \max_{x_1, y_1} \int_{t_0}^T c_1(t, u)dt + \max_{x_2, y_2} \int_{t_0}^T c_2(t, u)dt, u_0 \leq u \leq U.$$

В общем случае при отсутствии внешних ресурсов задача максимизации выпуска продуктов второго рода на плановом промежутке времени $[t_0, T]$ с помощью наилучшего распределения только внутренних ресурсов (за счет выбора функции y) была качественно исследована для отдельно взятой двухпродуктовой РС в [1]. В некоторых частных случаях эта оптимизационная задача распределения только внутренних ресурсов (с помощью функции y) была решена аналитически: для РС с начальной предысторией (при $t_0 > 0$ и заданных $x_i \equiv 0, f \equiv 0$) – в [1, с. 139-155]. Более общая оптимизационная задача 1 распределения как внутренних, так и внешних ресурсов была качественно исследована в [3]. Было доказано [1, 3, 7-9, 11-12], что решения оптимизационных задач качественно различаются в зависимости от величины глубины времени планирования $T - t_0$. На основе доказанных теорем был сформулирован в [11] закон оптимального развития системы – закон «разумного эгоизма» системы, который для пассивного взаимодействия множества систем можно переформулировать следующим образом: для того, чтобы социум пассивно

взаимодействующих систем успешно функционировал (иначе – максимизировал общий выпуск внешней продукции) в течение длительного промежутка времени, необходимо, чтобы на начальном отрезке времени $[t_0, \Theta_0]$, $t_0 < \Theta_0 < T$, каждая система PC_i значительную часть всех имеющихся внутренних и внешних ресурсов (отличную от минимально допустимой в силу соотношений модели), а в некоторых частных случаях и все имеющиеся ресурсы, прежде всего направляла в подсистему самосовершенствования A_i на повышение своих потенциальных возможностей (увеличение своих производительностей α_i и β_i) и на саморазвитие (производство новых продуктов первого рода, обеспечивающих само существование системы, повышение ее потенциальных возможностей и ее развитие), и лишь в конце $[\Theta_0, T]$, $\Theta_0 < \Theta_1 < T$, планового периода времени $[t_0, T]$ существенную долю всех ресурсов (а иногда – все имеющиеся внутренние и внешние ресурсы) направляла в подсистему Bi для производства внешнего продукта системы – продуктов второго рода (при этом в подсистему A_i поступает минимально допустимая часть всех ресурсов). Т.о., для достаточно большой величины $T - t_0$ каждая система вначале должна быть в некотором роде эгоистичной, и лишь в конце планового периода – альтруистичной. Эгоизм здесь называется «разумным», так как предпочтение своих личных интересов каждой РС интересам социума РС в данном случае является кажущимся, потому что оно полезно для всего социума. Если же величина времени $T - t_0$ достаточно мала, то каждая система должна направлять существенную долю всех ресурсов (а иногда – все имеющиеся внутренние и внешние ресурсы) в подсистему B_i для производства внешнего продукта системы (в этом случае в подсистему A_i поступает минимально допустимая часть всех ресурсов, т.е. в этом случае каждая система должна быть с самого начала альтруистичной). Отметим, что для макроэкономических систем достаточно большой интервал времени соответствует продолжительности жизни двух и более поколений [1, с. 281]. Нельзя не заметить некоторое сходство (случайное ли?) между законом «разумного эгоизма» и основным коммунистическим принципом: «каждому – по потребностям, от каждого – по способностям». Не является ли этот закон уточнением указанного принципа?

Замечание 5. Особый интерес для задач взаимодействия представляет случай активного взаимодействия, когда доля скорости поступления внешнего ресурса z_i в каждую из РС зависит от некоторого качества управлений $\{x_1, y_1, x_2, y_2\}$. Если

$$z_i(t, x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{P_i(t) + \int_{t_0}^t c_i(\tau) d\tau}{\sum_{j=1}^2 \left(P_j(t) + \int_{t_0}^t c_j(\tau) d\tau \right)};$$

$$M = (m_1, c_1, m_2, c_2), Z = (z_1, z_2),$$

то в силу того, что Z удовлетворяет условию Липшица по M равномерно по t на $[t_0, T]$, можно показать, что доказанная теорема 1 справедлива и в этом случае (Z_i можно находить методом простой итерации).

Выводы. Предложены интегральные модели активного и пассивного взаимодействия развивающихся систем, доказана теорема существования и единственности решения системы нелинейных интегральных уравнений вольтерровского типа, описывающих взаимодействие континуальных развива-

ющихся систем с заданной начальной предисторией, поставлены некоторые задачи оптимального активного и пассивного взаимодействия континуальных развивающихся систем и внешней среды. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании оптимального функционирования многих реальных развивающихся систем (экономических, экологических, биологических и т.д.). Для дальнейших исследований особенно интересен случай активного взаимодействия систем.

Список литературы

1. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем. – М.: Наука, 1983. – 352 с.
2. Иванов В.В., Вугинштейн А.Э. О континуальных моделях развивающихся систем // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. XXI, № 3. – С. 473–484.
3. Гирлин С.К., Богданова О.С. Исследование уравнений модели открытой континуальной развивающейся системы // Методологічні та методичні основи активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів у процесі вивчення математичних дисциплін: Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції (Ялта, 23–24 листопада 2009 р.). – 36. статей. – Ялта: РВВ КГУ, 2009. – Вып. 3. – С. 167–177.
4. Гирлин С.К., Иванов В.В. Моделирование взаимодействия развивающихся систем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – № 1. – С. 58–60.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
6. Гирлин С.К. Моделирование возникающих развивающихся систем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1987. – № 10. – С. 65–67.
7. Гирлин С.К., Зайцева Е.С. Оптимальное управление развитием экономической системы // Статий розвиток підприємств сфери послуг: Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції (Ялта, 28–29 листопада 2008 р.). – Ялта: РВВЗ КГУ, 2008. – С. 162–165.
8. Гирлин С.К. Лекции по интегральным уравнениям. – Ялта: РИО КГУ, 2012. – 177 с.
9. Гирлин С.К., Билюнас А.В. Модель и законы оптимального развития систем // Успехи современного естествознания. – 2011. – № 7. – С. 254–259.
10. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ: Справочное пос. – Киев: Наук. думка, 1986. 584 с.
11. Яценко Ю.П. Интегральные модели систем с управляемой памятью. – К.: Наук. думка, 1991. – 220 с.
12. Victor V. Ivanov. Model development and optimization. – Dordrecht / Boston. – London: Kluwer Academic Publishers, 1999. – 249p.
13. Viktor V. Ivanov and Natalya V. Ivanova. Mathematical Models of the Cell and Cell Associated Objects. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 333 p.

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ В КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕДАХ ПРИ ПРОТЕКАНИИ ИМПУЛЬСНОГО ТОКА РАЗРЯДНОГО КОНТУРА

Калужный Д.А., Воронин А.А., Сухова Т.А., Суркаев А.Л.

Волжский политехнический институт,
филиал Волгоградского государственного технического
университета, www.volpi.ru, e-mail: vpfi@volpi.ru

При протекании тока в металлических проводниках возможно возникновение механических возмущений и генерирование упругих волн. Целью работы является проведение исследований механических возмущений, возникающих в цилиндрических проводниках вследствие протекания импульсного разрядного тока. Экспериментальная установка является традиционной и представляет собой энергетический накопитель [1] конденсаторного типа с соответствующей электродной системой. Максимальная запасенная энергия в накопителе составляет $W = 640$ кДж, общая электрическая емкость равна $C = 320$ мкФ, индуктивность разрядного контура равна $L = 7,8$ мкГн, максимальное напряжение конденсаторов $U_0 = 2$ кВ. Разрядный ток короткого замыкания достигал $I = 7 \cdot 10^3$ А. В качестве регистратора импульсного возмущения использовался пьезокерамический преобразователь (ЦТС-19), который располагался на торце цилиндрического проводника из латуни размерами: Электрический сигнал с преобразователя подавался на двухканаль-