УДК 548.1

ЭВОЛЮЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ И АНАЛИЗ ДЕТЕРМИНИСТИЧЕСКИХ ФРАКТАЛЬНЫХ РЕШЕТОК

Иванов В.В., Демьян В.В., Таланов В.М.

Южно-Российский государственный технический университет, Новочеркасский политехнический институт, Новочеркасск, e-mail: valtalanov@mail.ru

Представителями фракталов с конечным ветвлением и определенной симметрией являются, в частности, детерминистические фрактальные решетки, построенные из затравки в виде определенного фрагмента двумерной решетки. Конструкция таких фрактальных решеток полностью описывается заданием геометрического генератора и итерационной процедуры. Бесконечное повторение процедуры итерации дает полную фрактальную решетку [1–3].

Ключевые слова: эволюционная модель, детерминистические фрактальные решетки, геометрический генератор, итерационная процедура

DEVELOPMENTAL MODEL OF CREATION AND ANALYSIS OF DETERMINISTIC FRACTAL GRIDS

Ivans V.V., Damian V.V., Talanov V.M.

The South Russian state engineering university, Novocherkassk polytechnic institute, Novocherkassk, e-mail: valtalanov@mail.ru

Quoters of fractals W final fork and certain symmetry are, in particular, the deterministic fractal grids builted of a seed in the form of a certain piece of a two-dimensional grid. The construction of such fractal grids is completely presented by the job of the geometrical generator and iterative routine. Endless repetition of routine of iteration yields the complete fractal grid [1-3].

Keywords: a developmental model, deterministic fractal grids, the geometrical generator, iterative routine

Геометрическим генератором фрактальных решеток может быть фрагмент двумерных дважды периодических полигонных $R_{\{Pg\}im}$-структур, в частности, тетрагонных $R_{\{4\}im}$-структур, соответствующих двумерной сетке Кеплера 4444 или ее производным. Предполагается, что в вершинах тетрагона могут располагаться атомы, комплексные частицы, или определенные локальные совокупности атомов одного или нескольких сортов – молекулы, кластеры.

Процедура формирования генератора G из квадратного фрагмента тетрагонной $R_{\{4\}im}$-структуры определяется законом транскрипции T_{ik}:

$$G = L_{N\{4\},\, i,\, k}\,(N\{4\}_I,\, T_{ik}),$$

а процедура получения самоподобных фрактальных решеточных n-структур (предфракталов) – итерационным законом T_n:

$$F_{N\{4\}ik} = G(T_n) = L_{N\{4\},\, i,\, k}\,(N\{4\}_I,\, T_{ik},\, T_n),$$

где N – количество тетрагонов {4} в квадратном фрагменте пространства со стороной b; I – характеристика «ядра» двумерной тетрагонной структуры, которая определяла способ его ветвления (посредством вершин i_v или сторон i_r тетрагона); $k = b^{-1}$ – коэффициент самоподобия генерируемой фрактальной $F_{N\{4\}ik}$-структуры; n – целочисленный индекс, характеризующий количество применяемых итераций, где $n = 1$ соответствует генератору [4, 5].

Фрактальная (хаусдорфова) размерность D решетки в соответствии с [1] может быть определена из соотношения

$$D = \ln N\,(\ln b)^{-1},$$

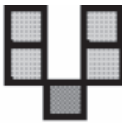
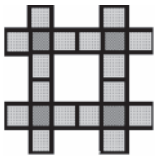
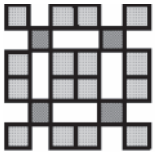
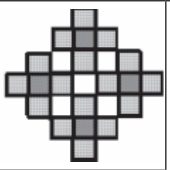
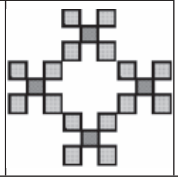
где N – число тетрагонов в генераторе, b – сторона генератора (в относительных единицах). Тогда, если $(b^2 - N)$ – число лакун в квадратном генераторе, то $D = \ln(b^2 - N)\,(\ln b)^{-1}$ – лакунарная размерность фрактальной решетки, характеризующая возможное дополнение данной фрактальной решетки до 2D тетрагонной $R_{\{4\}im}$-структуры. Это дополнение может образоваться в процессе формирования основной фрактальной $F_{N\{4\}ik}$-структуры за счет «захвата» структурных элементов с определенным набором (спектром) размерных характеристик и в этом случае также, по-видимому, будет обладать фрактальными свойствами.

В таблице приведены основные характеристики представителей двух групп фрактальных $F_{N\{4\},i,k}$-структур (при N равном 5 и 20).

Очевидно, в частности, что $F_{5\{4\},i,k}$-структуры основаны на разных фрагментах тетрагонных $R_{\{4\}im}$-структур, отличаются информационными кодами генераторов и их симметрией, однако по остальным харак-

теристикам, в том числе и фрактальным размерностям, не идентифицируются. При этом также очевидно, что это существенно разные $F_{5\{4\},i,k}$-структуры. В определенной степени такой же вывод можно сделать и относительно $F_{20\{4\},i,k}$-структур.

Характеристики некоторых фрактальных $F_{N\{4\},i,k}$-структур, основанных на фрагментах тетрагонных $R_{\{4\}im}$-структур

Характеристики генератора $G = L_{N\{4\},i,k}$					Размерность фрактальной структуры	
Информационный код	Форма	Симметрия, G^2_0	N	b^2–N	Локальная, $D_{BL} = D$	Лакунарная, D_G
$L_{5\{4\},4(r),1/3}$		4 mm	5	4	1,465	1,262
$L_{5\{4\},3(r),1/3}$		m	5	4	1,465	1,262
$L_{5\{4\},2(r),1/3}$						
$L_{5\{4\},4(v),1/3}$		4 mm	5	4	1,465	1,262
$L_{5\{4\},2(v),1/3}$		m	5	4	1,465	1,262
$L_{5\{4\},1(v),1/3}$						
$L_{20\{4\},4(r),1/6}$		4 mm	20	16	1,465	1,262
$L_{20\{4\},4(v),1/6}$						
$L_{20\{4\},4(r),1/6}$		4 mm	20	12	1,548	1,431
$L_{20\{4\},4(v),1/6}$				52	1,114	1,770

Различными являются и дополнения этих структур. Это становится очевидным после сравнительного анализа их лакунарных спектров на диаграммах вида

$$\lg N_{\ln} - \lg d_{\ln}^{\text{отн}},$$

где $N_{\ln}$ – число лакун l-й группы с определенным относительным диаметром $d_{\ln}^{\text{отн}}$ для предфрактала n-го поколения,

$$d_{\ln}^{\text{отн}} = \left(S_{\ln}^{\text{отн}}\right)^{1/2}$$

и в общем случае определяется из относительной площади лакун [4, 5].

Все $F_{5\{4\},I,k}$-структуры отличаются по своим лакунарным спектральным характеристикам, которые в определенном смысле можно считать диагностическими. На диаграммах вида $(N/b^2) - D$ значения фрактальных размерностей анализируемых F-структур и известной структуры $F_{8\{4\},3®,1/3}$, представляющей собой классический квадратный ковер Серпинского со значением $k = 1/3$ [3], находятся на одной прямой [4]. Необходимо отметить, что эта прямая занимает промежуточное положение между двумя другими прямыми, которые аппроксимируют два множества значений для соответствующих n-х членов гомологических рядов ковров Серпинского: $F_{(6+2n)\{4\},\ I,\ 1/(3(2+n))}^{1/2}$-структур и $F_{(4+4n)\{4\},\ I,\ 1/(2+n)}$-структур ($n = 1, 2, 3,\ldots$) [2, 3].

Полученные с помощью итерационного модулярного дизайна на тригонной сетке детерминистические фрактальные решетки с $F_{N\{3\},\ i,\ k}$-структурами также соотносятся с гомологической серией фрактальных структур вида $F_{(6+2n)\{3\},\ I,\ 1/(3(2+n))}^{1/2}$ и $F_{(3+3n)\{3\},\ I,\ 1/(2+n)}$ и классической треугольной косынкой Серпинского $F_{3\{3\},3(r),1/3}$ [2, 3].

В заключение отметим, что многообразие формально возможных детерминистических фрактальных решеток, полученных методом итерационного модулярного дизайна, определяется многовариантностью разбиения двумерного пространства (образами для которого могут служить сетки Кеплера и их производные) и многовариантностью выбранных в качестве генератора фрагментов соответствующих двумерных однослойных и двухслойных полигонных структур. Данному многообразию детерминистических фрактальных решеток изоморфно многообразие наборов их геометрико-топологических характеристик, в том числе лакунарных спектров. Последние могут быть использованы как аппроксиманты для интерпретации особенностей статистических распределений микро и наночастиц определенных фаз в поверхностных слоях гетерофазных материалов.

Список литературы

1. Лорд Э.Э., Маккей А.Л., Ранганатан С. Новая геометрия для новых материалов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 264 с.

2. Фракталы в физике / под ред. Л. Пьетронеро и Э. Тозатти. – М.: Мир, 1988. – 420 с.

3. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 260 с.

4. Иванов В.В., Демьян В.В., Таланов В.М. Информация и структура в наномире: модулярный дизайн фрактальных структур в двумерном пространстве // Международный журнал экспериментального образования. – 2010. – №11. – С. 153–155.

5. Иванов В.В., Таланов В.М., Гусаров В.В. Информация и структура в наномире: модулярный дизайн двумерных наноструктур и фрактальных решеток // Наносистемы: Физика, Химия, Математика. – 2011. – Т. 2, №3. – С. 121–134.