УДК 548.1

ПРИНЦИПЫ МОДУЛЯРНОГО СТРОЕНИЯ РЕГУЛЯРНЫХ ФРАКТАЛЬНЫХ СТРУКТУР

Иванов В.В., Таланов В.М.

Южно-Российский государственный технический университет, Новочеркасский политехнический институт, Новочеркасск, e-mail: valtalanov@mail.ru

Главной особенностью фрактальных структур является их самоподобная иерархическая организованность в соответствующем метрическом пространстве [1-6]. Свойство бесконечного самоподобия означает точную масштабную инвариантность геометрически регулярной фрактальной структуры относительно набора последовательных операций отображений подобия методом итераций.

Ключевые слова: молекулярное строения, фрактальные структуры, бесконечное самоподобие

PRINCIPLES OF THE MODULAR CONSTITUTION OF THE REGULAR FRACTAL FRAMES

Ivans V.V., Talanov V.M.

The South Russian state engineering university, Novocherkassk polytechnic institute, Новочеркаск, e-mail: valtalanov@mail.ru

Key feature of fractal frames is their self-similar hierarchic organisation in appropriate metrical room [1-6]. Property of endless self-similarity means an exact scale invariance geometrically the regular fractal frame concerning a panel of serial processes of mappings of similarity a method of iterations.

Keywords: the molecular constitutions, fractal frames, endless self-similarity

Формально в рамках итерационного метода существуют два принципиально разных подхода к формированию регулярной фрактальной структуры F: инъективный и сюръективный. Будем рассматривать фрактальную топологию объектов в геометрическом двумерном пространстве. Тогда по аналогии с представлениями теории фрактальных множеств [7-9] имеем:

1. Инъективный подход – если $S_I \ldots S_N$ – набор *сжимающих* отображений метрического двумерного пространства со структурой F на себя, то найдется единственная *компактная* фрактальная структура $F^{(2)}$, такая что

$$F^{(2)} = S_I(F)\ \chi \ldots \chi\ S_N(F),$$

а

$$S_i(F_i) = F_{i+1} = \mathrm{Im}F_i\ \delta\ F_i.$$

Инъективное отображение S_i предполагает вложение образа структуры $\mathrm{Im}F_i$ в подобный элемент структуры F_i. В результате бесконечной итерационной процедуры образы $\mathrm{Im}F_i$ компактной фрактальной структуры $F^{(2)}$ становятся точками.

2. Сюръективный подход – если $S_I \ldots S_N$ – набор *растягивающих* отображений части пространства (генератора G) на полное метрическое двумерное пространство, то найдется единственная *бесконечная* фрактальная структура $F^{(2)}$, такая что

$$F^{(2)} = S_I(G)\ \chi \ldots \chi\ S_N(G),$$

а

$$S_i(G_i) = G_{i+1} = \mathrm{Im}G_i\ \varepsilon\ G_i.$$

Сюръективное отображение S_i предполагает такое расширение генератора, при котором возможно вложение прообраза его G_i в структурный элемент подобного ему образа $\mathrm{Im}G_i$. В результате бесконечной итерационной процедуры полный образ $\mathrm{Im}G_i$ бесконечно размерной фрактальной структуры $F^{(2)}$ содержит упорядоченные в двумерном пространстве структурные элементы в форме генератора G.

При сюръективных отображениях генератора G из N элементов а с $(b^2 - N)$ дополнениями a' в элемент образа $\mathrm{Im}G$ образуется соответствующее количество орбит элементов a_i и a'_i [9]. Они представляют собой инвариантные частично упорядоченные подмножества множеств $\{a\}$ и $\{a'\}$. Каждая орбита одинаковых элементов a – однородное N – элементное дерево, а орбиты дополнений a' – неоднородны и состоят из полностью упорядоченных цепей, фильтрующихся влево, при этом каждый i-й элемент цепи является корнем однородного дерева с $(i - 1)$ ветвлениями.

При инъективных отображениях генератора G из N элементов а с $(b^2 - N)$ дополнениями в каждый из элементов a_i также образуются два подмножества $\{a\}$ и $\{a'\}$. Они могут быть представлены как множества соответствующих орбит [9]. Орбиты а представляют собой N полностью упорядоченных цепей, фильтрующихся вправо с элементами-корнями однородных деревьев с определенным количеством ветвлений. Орбиты a' есть $(b^2 - N)$ неоднородных N – элементных полностью упорядоченных деревьев с количеством ветвлений, соответствующим итерации.

Отметим, что в обоих подходах при конечном числе итераций формируются предфракталы (компактные или конечноразмерные, соответственно), состоящие из самоподобных модулей. Однако только при сюръективном подходе к формированию предфракталов процесс их образования аналогичен росту поверхностных фрактальных структур из одинаковых модулей, размеры которых коррелируют с размерами молекул, атомных кластеров, наночастиц и других атомных ассоциатов.

Замкнутые фрактальные кривые задаются на прямолинейном отрезке – стороне $\{n\}$-гона генератором в виде ломаной кривой с определенным коэффициентом самоподобия. При последовательном инъективном отображении образов ее в отрезки-прообразы на периметре полигона образуется замкнутая фрактальная кривая. Если в качестве инициального множества рассматривать некоторые двумерные сетки Кеплера-Шубникова, узлы которых удовлетворяют условию топологической эквивалентности окружения $\{n\}$-телами и лакунами, то получим соответствующее упорядоченное в двумерном пространстве множество фрактальных кривых $\{F^{(1)}\}$. Их пересечения образуют множество упорядоченных в пространстве точек, в общем случае изоморфное множеству узлов инициальной двумерной сетки.

Множество $\{F^{(1)}\}$ можно одновременно рассматривать в качестве квазифрактальной границы как растущей поверхностной фазы так и остального, лакунарного пространства, которое является дополнением до двумерного пространства. В некоторых случаях лакунарные кривые распадаются на множества самоподобных фрактальных кривых, которые обладают свойствами канторова множества [10, 11]. В этом случае сами лакунарные замкнутые фрактальные кривые могут быть представлены как множества орбит, которые суть полные упорядоченные цепи, фильтрующиеся вправо, а элементы цепи – корни однородных деревьев с 2-ветвлением.

На основании результатов предварительного анализа особенностей строения регулярных фрактальных структур можно сформулировать следующие принципы.

1. ***Принцип модулярного строения регулярных фрактальных структур:*** Любая регулярная фрактальная структура может быть представлена из одинаковых минимальных модулей, строение и форма которых содержит структурную информацию как о самой фрактальной структуре, так и о любом ее предфрактале. Такие модули выполнят функцию генератора $G \equiv F_1$ модулярной фрактальной структуры и, в частности, любого ее предфрактала n-го поколения:

$$F_n (F_1) \equiv F_n (G),$$

где n – количество итераций.

Для описания модулярного строения регулярных фрактальных структур может быть использован аппарат модулярной кристаллографии [10].

2. ***Принцип иерархии модулей самоподобных регулярных фрактальных структур:*** Самоподобная регулярная фрактальная структура может быть представлена как модулярная из любых ее предфракталов [4, 11]. В частности, модулярное строение каждого предфрактала n-го поколения F_n может быть представлено модулями – предфракталами предыдущих поколений:

$$F_n (F_{n-1} (F_{n-2} (F_{n-3} \ldots (F_1) \ldots))),$$

а сами модули классифицируются по сложности в иерархической последовательности $F_n\ \varepsilon\ F_{n-1}\ \varepsilon\ F_{n-2}\ \varepsilon\ F_{n-3}\ \varepsilon\ \ldots\ \varepsilon\ F_1$.

Сформулированные выше принципы положены в основу эволюционной модели формирования детерминистических фрактальных структур с дробной размерностью и упорядоченных в 2D пространстве множеств и мультимножеств замкнутых фрактальных кривых (см., например, [12, 13]). Отметим, что лакунарные спектры фрактальных структур и мультифракталов могут представлять интерес в связи с определением вероятных распределений по размерам микро и наночастиц, захваченных в процессе роста основной поверхностной фазы.

Список литературы

1. Фракталы в физике / под ред. Л. Пьетронеро и Э. Тозатти. – М.: Мир, 1988. – 420 с.
2. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 260 с.
3. Лорд Э.Э., Маккей А.Л., Ранганатан С. Новая геометрия для новых материалов. – М.: Физматлит, 2010. – 264 с.
4. Whyte L.L., Wilson F.C. Wilson D. Hierahical Structures. – N.Y.: Elsevier, 1990.
5. Sander L.M. Fractal growth // Sci. Am., 1987. – V. 256. – P. 94–100.
6. Таланов В.М., Ерейская Г.П., Юзюк Ю.И. Введение в химию и физику наноструктур и наноструктурированных материалов. – М.: Изд-во «Академия естествознания», 2008. – 389 с.
7. Бурбаки Н. Теория множеств. – М.: Мир, – 1965. – 455 с.
8. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. – М.: Мир, 1976. – 400 с.
9. Общая алгебра. В 2-х томах / под общ. ред. Л.А. Скорнякова. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – Т.1. – 592 с.; 1991. – Т.2. – 480 с.
10. Ferraris G., Makovicky E., Merlino S. Crystallography of modular structures. – IUC Oxford Science Publications. – 2008. – 370 p.
11. Лорд Э.Э., Маккей А.Л., Ранганатан С. Новая геометрия для новых материалов. – М.: Физматлит, 2010. – 264 с.
12. Иванов В.В., Демьян В.В., Таланов В.М. Информация и структура в наномире: модулярный дизайн фрактальных структур в двумерном пространстве // Международный журнал экспериментального образования. – 2010. – №11. – С. 153–155.
13. Иванов В.В., Таланов В.М., Гусаров В.В. Информация и структура в наномире: модулярный дизайн двумерных наноструктур и фрактальных решеток // Наносистемы: физика, химия, математика. – 2011. – Т.2, №3. – С. 121–134.