«Экологический мониторинг», Италия (Рим, Венеция), 16-23 августа 2012 г.

Технические науки

РАСШИРЕНИЕ ГРАНИЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СВОБОДНОГО РАСТЕКАНИЯ БУРНОГО ПОТОКА

[1]Дуванская Е.В., [2]Волосухин В.А.

[1]ГБОУ ВПО «Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса», Шахты, e-mail: delvik2004@list.ru;
[2]ФГБОУ ВПО «Новочеркасская мелиоративная академия», Новочеркасск

В работе предлагаются два основных решения для функции тока, при числах Фруда, меньших четырех, и больших четырех, которые определяются из общего решения двухмерной плановой задачи для бурного потока при свободном растекании. Новые решения лучше согласуются с экспериментом.

Интенсивное строительство автомобильных и железных дорог в России еще в XIX веке выдвинуло целый ряд проблемных вопросов по расчету отверстий малых мостов и дорожных труб. Так железнодорожная катастрофа, произошедшая в 1882 г. с многочисленными человеческими жертвами вблизи г. Тула была связана с разрушением из-за недостаточной водопропускной способности трубы под полотном дороги и размывом нижнего бьефа [1]. Обширные гидравлические исследования подобных конструкций были проведены в XX веке АО ВНИИВОДГЕО, ЦАГИ, КАДИ МГМИ, НИМИ, МИСИ [2, 3] и др. вузах и НИИ. Актуальны донные вопросы и для каналов обводнительно-оросительных систем, которые пересекаются с естественной гидрографической сетью в среднем через 7–8 км. Поэтому из подобных сооружений только на юге России более 20 тыс., находящихся на балансе Минсельхоза России и агропроизводителей.

Одним из приоритетных направлений по обеспечению экологической безопасности в настоящее время России является совершенствование существующих технологий в строительстве сооружений [4], которые подвергаются разрушению со стороны нижнего бьефа из-за недопустимого размыва крепления. Причиной разрушения крепления нижнего бьефа, в основном является неточный расчет параметров потока воды.

В [5] получено решение задачи свободного растекания потока по гладкому горизонтальному руслу для крайней линии тока, которое адекватно определяет зону повышенной нагрузки потока на боковое крепление, однако это решение не лишено недостатков. В предлагаемом решении параметры потока на выходе из трубы терпит разрыв модуль вектора скорости, а также направление вектора скорости. Кроме того, при числах Фруда, больших четырех, ухудшается адекватность полученного в [3] решения с экспериментальными данными.

Цель настоящей работы – получить решение задачи свободного растекания для функции тока, обладающее свойством непрерывности параметров потока на выходе из трубы и имеющее высокую адекватность с экспериментом.

В [5] было показано, что в случае растекания двухмерного стационарного потока без учета сил сопротивления в плоскости годографа скорости система уравнений движения бурного потока имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\dfrac{2h_0}{H_0}\dfrac{\tau}{1-\tau}\dfrac{\partial\psi}{\partial\tau}; \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau}=\dfrac{h_0}{2H_0}\dfrac{3\tau-1}{\tau(1-\tau)^2}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}, \end{cases} \quad (1)$$

где φ, ψ – соответственно потенциальная функция и функция тока; θ – угол наклона вектора скорости жидкой частицы к продольной оси симметрии потока – OX; $\tau=\dfrac{V^2}{2gH_0}$ – квадрат скоростного коэффициента; V – модуль вектора скорости жидкой частицы потока; h_0 – глубина потока в некоторой характерной точке; V_0 – модуль скорости в этой же точке; $H_0=\dfrac{V_0^2}{2g}+h_0$ – постоянная для всего потока; g – ускорение силы тяжести.

Система (1) совместно с граничными условиями позволяет ставить задачи плановой гидравлики в плоскости годографа скорости. При этом для решения конкретной задачи достаточно определить вид одной из функций $\varphi=\varphi(\tau,\theta)$ или $\psi=\psi(\tau,\theta)$, удовлетворяющей граничным условиям течения потока.

Рассмотрим задачу определения вида функции $\psi=\psi(\tau,\theta)$ в случае свободного растекания бурного потока за безнапорным отверстием в широкое горизонтальное отводящее русло. В задаче свободного растекания бурного потока необходимо выполнение условия для граничной линии тока (рис. 1):

$$\psi=\frac{V_0 b}{2}=\psi(\tau,\theta)=\text{const}. \quad (2)$$

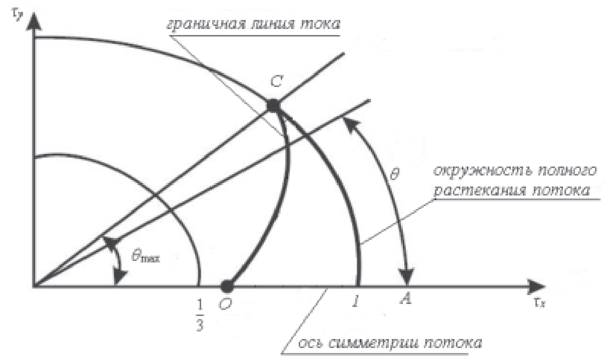

Рис. 1. Область течения потока в плоскости годографа скорости

Граничная линия тока «ОС» должна проходить через точку «О» с параметрами $\tau = \tau_0$, $\theta = 0$ и точку «С» с параметрами $\tau = 1$, $\theta = \theta_{max}$, таким образом,

$$\psi(\tau, \theta) = \psi(1, \theta_{max}). \qquad (3)$$

Угол «θ_{max}» определяется из условия совпадения граничной линии тока с одной из характеристик потока, выходящей из точки $\tau = \tau_0$, $\theta = 0$, при $\tau \to 1$ [3]:

$$\theta_{max} = C_1 + \left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot \frac{\pi}{2};$$

$$C_1 = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3\tau_0 - 1}{1 - \tau_0}} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3\tau_0 - 1}{3\left(1 - \tau_0\right)}}. \quad (4)$$

Следует отметить, что условий (2), (3) для однозначного определения функции $\psi(\tau, \theta)$ в задаче свободного растекания потока недостаточно, так как не определено физическое условие течения потока вдоль граничной линии тока.

Решение системы (1) для функции тока у потоков, имеющих продольную ось симметрии, согласно [7] записывается в виде:

$$\psi = M\sin\theta\left(1 - \tau\right)^{\gamma}\left(\tau - \tau_0\right)^{-1/2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[A_k^{(1)}\psi_{1k}^{(1)} + A_k^{(2)}\psi_{1k}^{(2)}\right]\sin k\theta + \right.$$
$$\left. + \left[B_k^{(1)}\psi_{1k}^{*(1)} + B_k^{(2)}\psi_{1k}^{*(2)}\right]\sin\left(2k - 1\right)\theta\right\}, \qquad (5)$$

где

$$\psi_{1k}^{(1)} = \tau^k Y_k^{(1)}; \quad \psi_{1k}^{*(1)} = \tau^{k-\frac{1}{2}} Y_k^{*(1)};$$
$$\psi_{1k}^{(2)} = \tau^k Y_k^{(2)}; \quad \psi_{1k}^{*(2)} = \tau^{k-\frac{1}{2}} Y_k^{*(2)};$$

$$Y_k^{(1)} = F\left(a_k, b_k, c_k, \tau\right) = 1 + \frac{a_k b_k}{c_k}\tau + \frac{1}{2!}\frac{a_k\left(a_k + 1\right)b_k\left(b_k + 1\right)}{c_k\left(c_k + 1\right)}\tau^2 + \ldots;$$
$$Y_k^{(2)} = \tau^{-2k} F\left(a_k - 2k, b_k - 2k, 1 - 2k, \tau\right);$$

$F(a_k, b_k, c_k, \tau)$ гипергеометрическая функция;

$$Y_k^{*(1)} = F\left(a_k^*, b_k^*, c_k^*, \tau\right) = 1 + \frac{a_k^* b_k^*}{c_k^*}\tau + \frac{1}{2!}\frac{a_k^*\left(a_k^* + 1\right)b_k^*\left(b_k^* + 1\right)}{c_k^*\left(c_k^* + 1\right)}\tau^2 + \ldots;$$
$$Y_k^{*(2)} = \tau^{1-2k} F\left(a_k^* + 1 - 2k, b_k^* + 1 - 2k, 2 - 2k, \tau\right);$$

$$a_k = \frac{2k - 1}{2} + \frac{\sqrt{12k^2 + 1}}{2}; \quad a_k^* = k - 1 + \sqrt{3k^2 - 3k + 1};$$
$$b_k = \frac{2k - 1}{2} - \frac{\sqrt{12k^2 + 1}}{2}; \quad b_k^* = k - 1 - \sqrt{3k^2 - 3k + 1};$$
$$c_k = 2k + 1. \quad c_k^* = 2k.$$

При этом считаем, что c_k и c_k^* в выражениях (5) не равны нулю или целому отрицательному числу; M, $A_k^{(1)}$, $A_k^{(2)}$, $B_k^{(1)}$, $B_k^{(2)}$ – коэффициенты, подлежащие определению в результате решения задачи.

Первое слагаемое в выражении (5) необходимо для выполнения условия непрерывности по параметрам потока в окрестности выхода из отверстия. Величина определяется из условия достаточного затухания влияния первого слагаемого в выражении (5) по мере приближения τ к единице.

Решение вида (5) будем рассматривать такое, что для крайней линии тока (2) выполняется условие

$$\lim_{\tau\to\tau_0}\left(\tau-\tau_0\right)^{-1/2}\sin\theta=1. \qquad (6)$$

Тогда постоянная M определяется из равенства:

$$V_0 b/2 = M\left(1-\tau_0\right)^{\gamma}. \qquad (7)$$

Постоянные $A_k^{(1)}, A_k^{(2)}, B_k^{(1)}, B_k^{(2)}$ определяются из условий:

1)

$$\psi\left(1,\theta_{\max}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[A_k^{(1)}\psi_{1k}^{(1)}+A_k^{(2)}\psi_{1k}^{(2)}\right]\sin k\theta+\right.$$
$$\left.+\left[B_k^{(1)}\psi_{1k}^{*(1)}+B_k^{(2)}\psi_{1k}^{*(2)}\right]\sin\left(2k-1\right)\theta\right\}=\frac{V_0 b}{2}; \qquad (8)$$

2) функция $\theta=\Phi\left(M, A_k^{(1)}, A_k^{(2)}, B_k^{(1)}, B_k^{(2)}, \tau\right)$ (9) вдоль граничной линии тока

$$\psi\left(\theta,\tau,M,A_k^{(1)},A_k^{(2)},B_k^{(1)},B_k^{(2)}\right)=V_0 b/2$$

должна быть монотонно возрастающей по аргументу «τ» и максимальной в зависимости от коэффициентов $A_k^{(1)}, A_k^{(2)}, B_k^{(1)}, B_k^{(2)}$ при каждом фиксированном «τ» [5]. Свойство монотонности следует из основных свойств бурного свободно-растекающегося потока. Оптимум по углу «θ» следует из законов оптимальности в задачах, имеющих какую-либо свободу выбора, а также совпадения результатов моделирования, эксперимента и натурных исследований.

Решение задачи свободного растекания бурного открытого водного потока начнем с определения постоянных $A_k^{(1)}, A_k^{(2)}, A_k^{*(1)}, A_k^{*(2)}$.

Рассмотрим вначале самый простой случай решения задачи при $k = 1$ и выборе решения (первое слагаемое в ряде (5) для простоты можно опустить)

$$\psi = A_1\tau^{-1/2}\sin\theta. \qquad (10)$$

В этом случае исследования проводятся вдоль крайней линии тока, начиная не с точки ($\tau = \tau_0$, $\theta = 0$) а с разрывом параметров течения на выходе из трубы, т.е. с точки $K(\tau = \tau_K, \theta = \theta_K)$ (рис. 2).

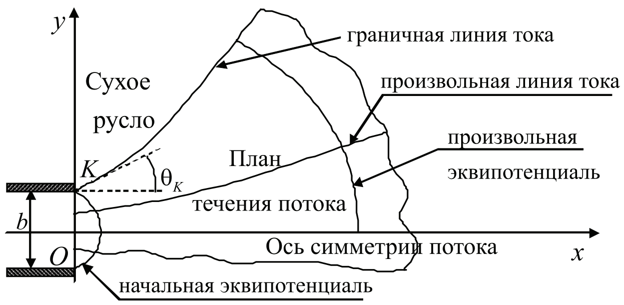

Рис. 2. План растекания потока с разрывом параметров на выходе из трубы

При $\gamma = 11$ в решении (5) в пределе выполняется и условие

$$\psi(\tau_0, 0) = V_0 b/2$$

и практически возможен на малом расстоянии по «x»: $x/b < 0{,}1$ рост угла θ от нуля до конечного θ_k, поэтому выбор решения в виде (10) оправдан. Вид решения (10) имеет следующее обоснование:

при $0 < \theta < \pi/2$ функция $f_1(\theta) = \sin\theta$ монотонно возрастающая; функция $f_2(\tau) = \tau^{1/2}$ также монотонно возрастает при $\tau_K \le \tau < 1$

Таким образом, отношение этих функций может быть постоянным при изменении самих аргументов τ и θ.

Постоянная A_1 определяется из условия:

$$V_0 b/2 = A_1\sin\theta_{\max}. \qquad (11)$$

В случае, когда число постоянных $A_k^{(1)}, A_k^{(2)}, A_k^{*(1)}, A_k^{*(2)}$ в выражениях (5) равно двум, то возможен вариант:

$$\psi = \left[A_1 f_1(\tau) + A_2 f_2(\tau)\right]\sin\theta. \qquad (12)$$

В этом случае имеем:

$$\psi = A_1\tau^{-1/2}\sin\theta + A_2\tau^{1/2}\left(1-\tau/2\right)\sin\theta. \qquad (13)$$

Вдоль крайней линии тока при $\tau = 1$, $\theta = \theta_{\max}$ поэтому из (13) следует равенство:

$$\psi = V_0 b/2 = \left[A_1 + A_2/2\right]\cdot\sin\theta_{\max}, \qquad (14)$$

следовательно:

$$A_1 + \frac{A_2}{2} = \frac{V_0 b}{2\sin\theta_{\max}}. \qquad (15)$$

Будем полагать, что коэффициенты A_1 и A_2 являются неотрицательными величинами. Считаем функцию

$$\theta = \arcsin\left\{\frac{V_0 b}{\left[2A_1\tau^{-1/2} + A_2\tau^{1/2}(2-\tau)\right]}\right\} \quad (16)$$

монотонно возрастающей и доставляющей максимум при любых τ из области изменения $[\tau_0; 1]$.

На базе математического пакета «Mathcad, version 11.0»была разработана программа, определяющая оптимальные значения коэффициентов A_1, A_2. На рис. 3 показано сравнение функций угла растекания потока (17) при значениях $\tau_0 = 0{,}5$, параметр A_2 определялся из зависимости (15), значение параметра A_1 равно

$$A_1^k = \frac{V_0 b}{2\sin\theta_{\max}} \cdot \frac{k}{3}, \quad (17)$$
$$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

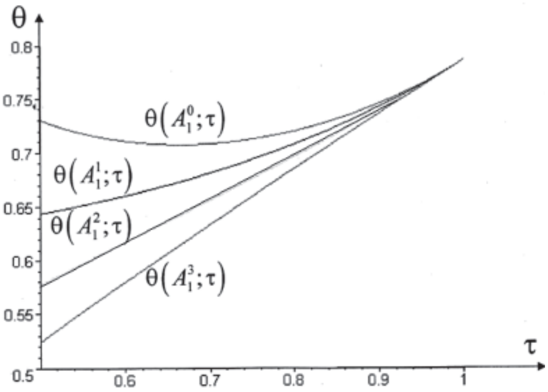

Рис. 3. Графики угла растекания потока при $\tau_0 = 0{,}5$ и различных значениях A_1A_1

Из рисунка (3) нетрудно видеть, что условию наибольшего растекания потока и его монотонности по τ соответствует функция $\theta\left(A_1^3;\tau\right)$, то есть функция

$$\theta = \arcsin\left\{\tau^{1/2} \cdot \sin\theta_{\max}\right\}. \quad (18)$$

Результаты моделирования сравнивались с результатами экспериментов. Это сравнение позволило сформулировать следующее утверждение: найденные постоянные

$$A_1 = \frac{V_0 b}{2\sin\theta_{\max}},\ A_2 = 0. \quad (19)$$

в выражении (5) доставляют максимум функции

$$\theta = f\left(\tau; A_k^{(1)}, A_k^{(2)}, A_k^{*(1)}, A_k^{*(2)}\right) \quad (20)$$

для соответствующих значений «τ», $\tau \in [\tau_0;\ 1]$ при этом функция (20) является монотонно возрастающей по τ и удовлетворяет условию:

$$\theta_{\max} = f\left(1; M; A_k^{(1)}, A_k^{(2)}, A_k^{*(1)}, A_k^{*(2)}\right), \quad (21)$$
$$k = 1,2,...$$

Высокую степень адекватности по параметрам потока в окрестности выхода потока из трубы до расширения потока $\beta = \frac{B}{b} = 3...7$ дает модель по формуле (12) с постоянными (19)

$$\psi = \frac{V_0 b}{2\sin\theta_{\max}} \frac{\sin\theta}{\tau^{1/2}} \quad (22)$$

при $\tau_0 \in \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Последующее решение задачи в физической плоскости сводится к использованию зависимости (12) с учетом того, что вдоль каждой линии тока $d\psi \equiv 0$, соответственно вдоль эквипотенциали $d\varphi \equiv 0$ и интегрированию получаемых уравнений.

Для случая (12) выражение для потенциальной функции имеет следующий вид:

$$\varphi = A_1 \frac{h_0}{H_0} \frac{\cos\theta}{\tau^{1/2}(1-\tau)}. \quad (23)$$

В этом случае задача по определению параметров потока в точке пересечения произвольной линии тока с произвольной эквипотенциалью сводится к поиску решений системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\cos\theta}{\tau^{1/2}(1-\tau)} = \dfrac{1}{\tau_A^{1/2}(1-\tau_A)}; \\ \dfrac{\sin\theta}{\tau^{1/2}} = K_T \sin\theta_{\max}, \end{cases} \quad (24)$$

где A – произвольная точка оси симметрии потока, через которую проходит эквипотенциаль.

Пусть теперь $\frac{2}{3} < \tau < 1$, тогда функция $\theta\left(A_1^0;\tau\right)$ является монотонно возрастающей (рис. 3), соответственно постоянные определяются по формулам

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{V_0 b}{\sin\theta_{\max}}, \quad (25)$$

которые в выражении (5) доставляют максимум для функции (20). Функция тока в этом случае имеет вид

$$\psi_2 = A_2 \tau^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\tau}{2}\right) \sin\theta. \qquad (26)$$

Потенциальная функция, соответствующая решению с константами (25), определяется из системы (1) при известной функции тока (26)

$$\varphi_2 = A_2 \frac{\tau^{\frac{1}{2}} \left(3\tau - 2\right) \cos\theta}{2\left(1 - \tau\right)}. \qquad (27)$$

Для оценки степени адекватности потока приведем результаты сравнения экспериментальных исследований с модельными (по методу автора и известных исследователей в области растекания плановых потоков).

Параметры потока на выходе из трубы

$$b = 16 \text{ см};\ V_0 = 148 \text{ см/с};$$

$$h_0 = 148 \text{ см};\ Fr_0 = 2/397.$$

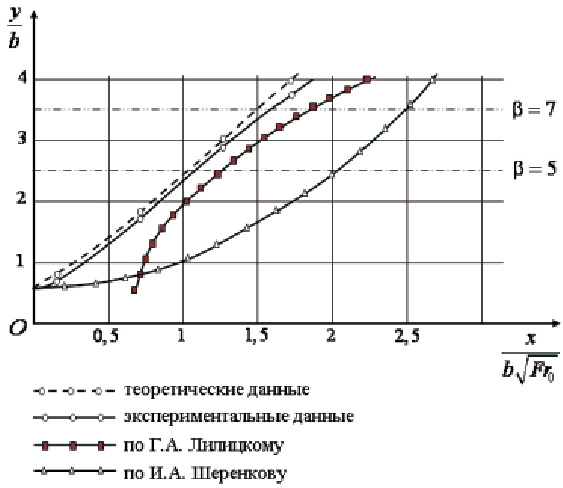

Рис. 4. Сравнение экспериментальной линии тока с графиками, построенными различными методами

Из результатов сравнения относительного рассогласования ординат крайней линии тока в теории и эксперименте видно, что при относительном расширении β = 7 погрешность не превышает 7 %, при этом рассогласование эксперимента с кривой по Г.А. Лилицкому превышает 15 %, а с кривой по И.А. Шеренкову – 40 %.

Выводы по работе

1. Пользуясь основными свойствами бурных потоков, авторы получили модели растекания потока при $1 < Fr_0 < 4$ и $Fr_0 \geq 4$ что повышает ее адекватность по геометрии растекания потока и по определению его параметров.

2. Полученные решения двухмерной плановой задачи обладают свойством непрерывности по параметрам потока на выходе из трубы в нижний бьеф.

Список литературы

1. Крицкий С.Н. Расчеты речного стока / С.Н. Крицкий, М.Ф. Менкель. – М.-Л.: ОНТИ, Госстройиздат, 1934. – 260 с.

2. Устройства нижнего бьефа водосбросов / Н.Т. Кавешников, Е.И. Китов, О.Н. Черных, И.С. Румянцев и др. / под ред. проф. Н.П. Розанова. – М.: Колос, 1984. – 269 с.

3. Розанов Н.П. Гидравлический расчет малых мостов и дорожных труб прямоугольного поперечного сечения. / Труды гидравлической лаборатории: сборник № 2; под ред. проф. А.Р. Березинского. – М.: Госстройиздат, 1948. – С. 147–176.

4. Бондаренко В.Л. Экологическая безопасность в строительстве / В.Л. Бондаренко, В.А. Волосухин, В.В. Приваленко, и др.; под ред. проф. И.С. Румянцева. – Новочеркасск: Альтаир, 2011. – 396 с.

5. Ширяев В.В. Развитие теории двухмерных открытых водных потоков: монография / В.В. Ширяев, М.Ф. Мицик, Е.В. Дуванская; под общ. ред. В.В. Ширяева. – Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2007. – 133 с.

6. Емцев Б.Т. Двухмерные бурные потоки. – М.: Энергия, 1967. – 212 с.

7. Коханенко В.Н. Моделирование одномерных и двухмерных открытых водных потоков: монография / В.Н. Коханенко, Я.В. Волосухин, В.В. Ширяев, Н.В. Коханенко; под общ. ред. проф. В.Н. Коханенко. – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2007. – 168 с.

8. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1970. – 720 с.