При значениях $0 < \sigma \geq 1$ его можно представить в виде $\sigma = \sin^2\left(\frac{\Psi}{2}\right)$ и выражение (11) запишется в виде

$$\tilde{\omega}^2 = 4I^2\left(\sin^2\frac{\Psi}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}\right),$$

откуда следует, что $|\psi| \leq \Psi$ и $|\tilde{\omega}|_{\psi=\pm\Psi} = 0$, т.е. движение носит колебательный характер, максимальное отклонение которого α определится из уравнения:

$$\sin^2\frac{\Psi(\alpha)}{2} = \sin^2\frac{\psi(\alpha)}{2}.$$

При значениях $\sigma > 1$ величина $\tilde{\omega} > 0$ в любой момент времени и груз совершает движение по раскручивающейся спирали.

Таким образом, предельным, разделяющим два движения груза, является уравнение $\sigma = 1$ (рис. 2), которое можно записать в виде:

$$\tilde{\omega}^2 = 4I^2\left(1 - \sin^2\frac{\psi}{2}\right) = 4I^2\cos^2\frac{\psi}{2}$$

или

$$\tilde{\omega} = \pm 2I\cos\frac{\psi}{2}.$$

При значениях $|\tilde{\omega}| > 2I\cos\frac{\psi}{2}$ груз совершает движение по раскручивающейся спирали, а при значениях $|\tilde{\omega}| \leq 2I\cos\frac{\psi}{2}$ – колебательное движение. Следовательно, при колебательном движении груза, его максимальное отклонение от положения устойчивого равновесия не может превышать величину $\alpha_{max} = \frac{\pi}{2}$.

Список литературы

1. Бертяев В.Д. Теоретическая механика на базе Mathcad. Практикум: учебное пособие. – СПб, БХВ – Петербург, 2005. – 752 с.
2. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. – ч. 1, 2. – М.: Наука, 1983.

О КОНЕЧНЫХ ПОВОРОТАХ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Цуркина Е.К.
Тульский государственный университет, Тула, e-mail: tm@tsu.tula.ru

Очевидно, твердое тело с неподвижной точкой может совершать только угловые перемещения. Эти перемещения называются поворотами. Основное свойство конечных поворотов твердого тела является их некоммутативность [1]. Рассмотрим это на простом примере. Пусть имеем твердое тело в форме прямоугольного параллелепипеда. Повернем параллелепипед сначала относительно оси *x* на 90 градусов, а затем относительно оси *z* на 90 градусов.

Эти повороты показаны на рис. 1. Далее изменим порядок поворотов и повернем параллелепипед сначала на 90° вокруг оси *z* а затем на 90° вокруг оси *x* (рис. 2).

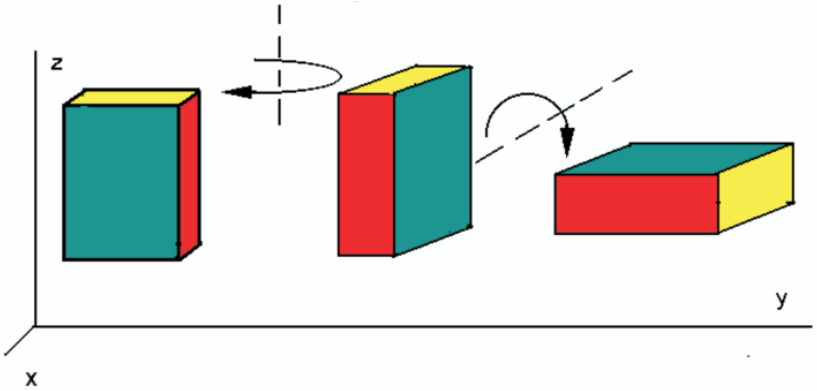

Рис. 1. Расчётная схема №1

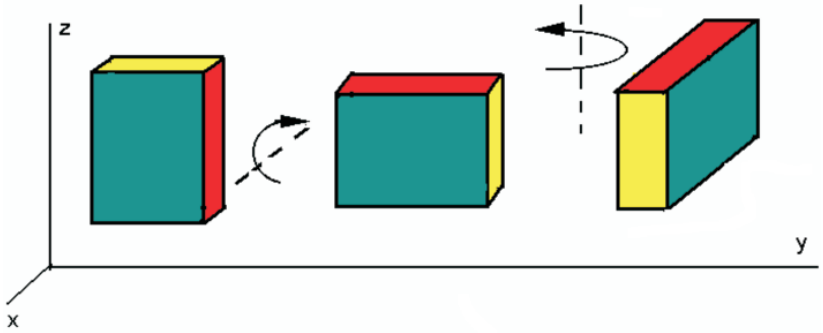

Рис. 2. Расчётная схема №2

Сравнение рис. 1 и 2 показывает, что конечное положение тела после двух поворотов зависит от их последовательности. Это и есть некоммутативность конечных поворотов. Из этого следует фундаментальное утверждение:*конечные повороты твердого тела не обладают ни свойствами чисел, ни свойствами векторов.*

Из теоремы Даламбера-Эйлера следует, что конечный поворот твердого тела с неподвижной точкой определяется четырьмя параметрами – углом конечного поворота и тремя направляющими косинусами оси конечного поворота. Угол конечного поворота обозначим через α, косинус угла между осью конечного поворота и осью *x* через *l*, косинус угла между

осью конечного поворота и осью y через m,косинус угла между осью конечного поворота и осью z через n. Пусть в начальный момент времени подвижная система координат совпадает с неподвижной. После конечного поворота между подвижными и неподвижными осями образуются некоторые углы, косинусы которых представим в виде таблицы

Таблица 1

	x	h	z
x	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y	a_{21}	a_{22}	a_{23}
z	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Если таблица направляющих косинусов известна, то угол конечного поворота определяется по формуле

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(a_{11} + a_{22} + a_{33}\right) - \frac{1}{2},$$

а направляющие косинусы оси конечного поворота определяются по формулам

$$\ell = \frac{a_{23} - a_{32}}{2\sin\alpha};$$

$$m = \frac{a_{31} - a_{13}}{2\sin\alpha};$$

$$n = \frac{a_{12} - a_{21}}{2\sin\alpha}.$$

Игрушка под названием «Кубик Рубика» известна всем. Конструкция кубика и правила, по которым производятся повороты, тесно связаны с теорией конечных поворотов твердого тела. На рис 3. для наглядности раскрашены только два кубика, и задача состоит в переводе кубика из положения 1 в положение 2. Необходимо определить, какие повороты необходимо произвести и найти угол конечного поворота и ориентацию оси конечного поворота.

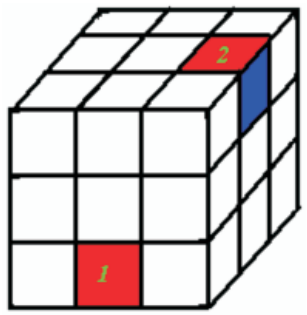

Рис. 3. Исходное положение кубика Рубика

Нетрудно сообразить, что для перевода среднего кубика 1 в положение 2 необходимо 2 поворота. Первый поворот вокруг вертикальной оси на 90° и второйповорот вокруг горизонтальной оси на 90°. Эти повороты показаны на рис. 4.

То же самое перемещение можно осуществить с помощью одного поворота. Выбираем систему координат xyz следующим образом (рис. 5). Каждая ось направлена по внешней нормали к соответствующей грани кубика. Ось z по нормали к передней грани, ось y по нормали к нижней грани, а направление оси x выбираем так, чтобы система осей xyz оказалась правой. После поворота ориентация каждой грани меняется и система xyz переходит в систему $x_1y_1z_1$.

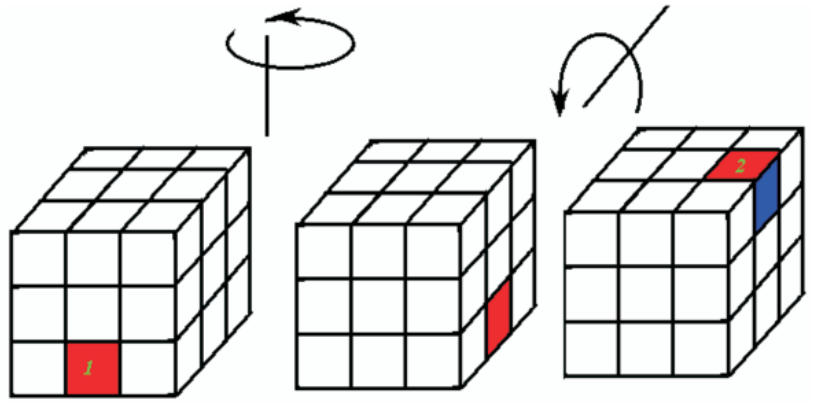

Рис. 4. Совмещение кубиков за 2 поворота

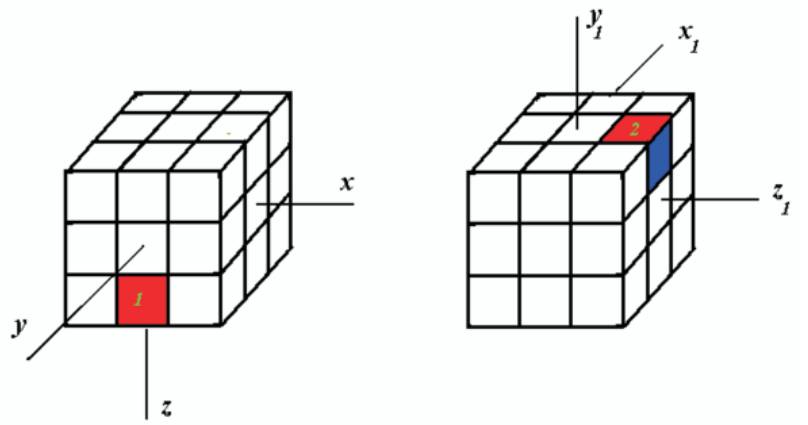

Рис. 5. Совмещение кубиков за 1 поворот

Составляем таблицу направляющих косинусов.

Таблица 2

	x_1	y_1	z_1
x	$a_{11} = 0$	$a_{12} = 0$	$a_{13} = 1$
y	$a_{21} = -1$	$a_{22} = 0$	$a_{23} = 0$
z	$a_{31} = 0$	$a_{32} = -1$	$a_{33} = 0$

Угол конечного поворота определяем по формуле

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - \frac{1}{2}.$$

Подставляя сюда элементы таблицы направляющих косинусов, получаем $\alpha = 120°$, после чего находим направляющие косинусы оси конечного поворота. После вычислений имеем

$$\ell = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Из геометрии известно, что такие направляющие косинусы имеет прямая, проходящая через диагональ куба. Ось конечного поворота показана на рис. 6.

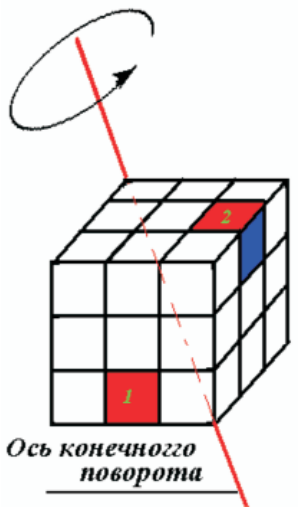

Рис. 6. Ось конечного поворота

Список литературы

1. Тарасов В.К. Курс теоретической механики для математиков. – ТулГУ, 2008. – 300 с.