тронике. В решении данной задачи может помочь исследование и применение разбавленных магнитных полупроводников. Это полупроводники, в немагнитной решетке которых растворяется небольшое количество магнитных ионов. Обменное взаимодействие между зонными электронами и локализованными на примесных ионах электронами приводит к ряду специфических эффектов и высокой чувствительности разбавленных магнитных полупроводников.

В работе рассматривается периодическая структура, содержащая чередующиеся слои магнитных полупроводников и диэлектриков. Проведен расчет коэффициентов отражения и пропускания от данной структуры. В качестве разбавленного магнитного полупроводника рассматривается оксид цинка ZnO с примесью Sn, легированный 3 % Mn [1]. Магнитная восприимчивость магнитного полупроводника аппроксимирована функцией вида $\mu = \mu(H)$, где H – напряженность внешнего магнитного поля. Для расчета коэффициента отражения использовался матричный метод.

В результате численных расчетов исследована зависимость коэффициентов отражения и пропускания от величины внешнего магнитного поля и температуры. Показана возможность изменения электродинамических характеристик рассматриваемой структуры в зависимости от величины магнитного поля. Рассмотренные структуры могут применяться в оптоэлектронике для создания переключателей различного типа, управляемых внешним магнитным полем.

Список литературы

1. Peaton S.J., Abernathy C.R., Norton D.P., Hebard A.F., Park Y.D., Boatner L.A., Budai J.D. // Materials Science and Engineering R. – 2003. – Vol. 40. – P. 137.

2. Tomasz Dietl. A ten-year perspective on dilute magnetic semiconductors and oxides // Nature Materials. – 2010. – Vol. 9. – P. 965–974.

СОСТАВЛЕНИЕ И РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА I РОДА

Ульченков М.А.

Тульский государственный университет, Тула, e-mail: tm@tsu.tula.ru

Движение голономной системы, состоящей из n точек с a связями вида $f_\alpha(\vec{r}_\nu, t) = 0$ $(\alpha = 1, ..., a)$ описывается системой уравнений

$$m_\nu \ddot{\vec{a}}_\nu = \vec{F}_\nu + \sum_{\alpha=1}^{a} \lambda_\alpha grand_\nu f_\alpha \quad (\nu = 1, ..., n);$$

$$\frac{d^2 f_\alpha}{dt^2} = \sum_{\nu=1}^{n} grand_\nu f_\alpha \cdot \vec{a}_\nu + c_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, ..., a); \qquad (1)$$

$$\vec{N}_\nu = \sum_{\alpha=1}^{a} \lambda_\alpha grand_\nu f_\alpha,$$

из которых определяются ускорения $\vec{a}_\nu$, реакции связей $\vec{N}$ и множители Лагранжа λ_α при заданных m_ν и $\vec{F}_\nu$. Уравнения (1) называются уравнениями Лагранжа первого рода [1].

Пример 1.

Материальная точка движется под действием силы тяжести по гладкой горизонтальной плоскости (рис. 1).

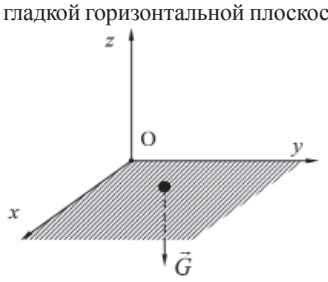

Рис. 1. Материальная точка движется по идеально гладкой горизонтальной плоскости под действием силы тяжести

Система имеет две степени свободы. Активная сила, действующая на точку, сила тяжести $\vec{G} = -G\vec{k}$, сила реакции связи $\vec{N} = -N_Z\vec{k}$. Уравнения Лагранжа I рода в данном случае имеют вид:

$$m\ddot{x} = 0,\ m\ddot{y} = 0,\ m\ddot{z} = -G + \lambda\frac{\partial f}{\partial z},$$

где $f = z = 0$ – уравнение связи и $\frac{\partial f}{\partial z} = 1$. Из последнего уравнения следует, что $\lambda = G$, $\vec{N} = \lambda grandf = -\vec{G}$, $\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$, точка движется по инерции.

Пример 2.

Материальная точка, движется по поверхности сферы под действием силы тяжести. Сфера идеально гладкая, точка сферу не покидает (рис. 2).

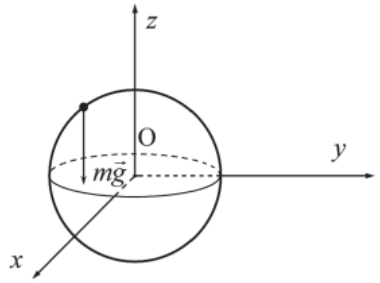

Рис. 2. Материальная точка движется под действием силы тяжести по идеально гладкой поверхности сферы

Система имеет две степени свободы. Уравнение связи $f = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$. На точку действует активная сила – сила тяжести $\vec{G} = -G\vec{k}$ и сила реакции связи $\vec{N} = \lambda grandF = 2\lambda\vec{r}$. Уравнения Лагранжа I рода имеют следующий вид:

$$m\ddot{x} = 2\lambda x,\ m\ddot{y} = 2\lambda y,\ m\ddot{z} = -G + 2\lambda z.$$

К полученным уравнениям присоединим условие, которому удовлетворяют возможные ускорения точки:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = 2\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}\right) = 0.$$

В последнее равенство подставим значения $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ и получим:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2\frac{\lambda}{m}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - \frac{Gz}{m} = 0,$$

откуда

$$\lambda = \left(Gz - mV^2\right)/2R^2$$

и, следовательно

$$\vec{N} = \lambda grandf = m\left(gz - v^2\right)\vec{r}/R^2.$$

Тогда искомые уравнения имеют вид:

$$m\ddot{x} = \frac{Gz - mV^2}{R^2}x, \quad m\ddot{y} = \frac{Gz - mV^2}{R^2}y;$$

$$m\ddot{z} = -G + \frac{Gz - mV^2}{R^2}z,$$

где $V^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Пример 3.

Материальная точка массой m движется по поверхности цилиндра радиуса R, уравнение которого в декартовых координатах $x^2 + y^2 = R^2$ (рис. 3). Силы, действующие на точку, уравновешены. Определить траекторию точки и реакцию поверхности, если в на-

чальный момент времени точка занимала положение $A(R; 0; 0)$ и имела начальную скорость

$$\vec{V}_0 = V_{0y}\vec{j} + V_{0z}\vec{k}.$$

Уравнение связи $f = x^2 + y^2 - R^2 = 0$. Уравнения Лагранжа I рода в данном случае имеют вид:

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{или} \quad m\ddot{x} = 2\lambda x;$$

$$m\ddot{y} = F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{или} \quad m\ddot{y} = 2\lambda y;$$

$$m\ddot{z} = F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{или} \quad m\ddot{z} = 0,$$

так как $F_z = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$.

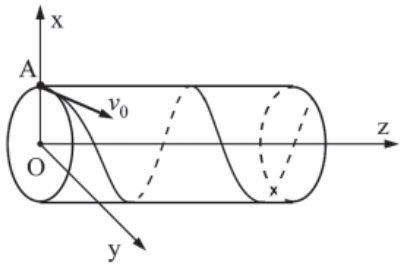

Рис. 3. Материальная точка массой движется по идеально гладкой поверхности цилиндра

Проинтегрируем третье из равенств: $\dot{z} = V_{0z}$, $z = V_{0z}t$. Из первых двух уравнений исключим множитель λ, поделив первое равенство на второе:

$$-\dot{x}y + \dot{y}x = 0, \quad \text{или} \quad d/dt\left(-\dot{x}y + \dot{y}x\right) = 0,$$

откуда, интегрируя, находим

$$-\dot{x}y + \dot{y}x = V_{0yR}.$$

Перейдем к полярным координатам в плоскости xOy: $x = R\cos\varphi, y = R\sin\varphi$ или $\dot{x} = -R\dot{\varphi}\sin\varphi, \dot{y} = R\dot{\varphi}\cos\varphi$, тогда

$$-\dot{x}y + \dot{y}x = R^2\dot{\varphi} = V_{0y}R,$$

откуда $\varphi = V_{0y}/R = \omega = \text{const}$.

Из последнего равенства следует, что $\varphi = \omega t$ и уравнения движения в конечном виде принимают вид:

$$x = R\cos\omega t, \quad y = R\sin\omega t, \quad z = V_{0z}t.$$

Последние уравнения определяют винтовую линию. Принимая во внимание $\lambda = m\ddot{x}/2x$ и учитывая первое равенство, определяем силы реакции:

$$\vec{N} = \lambda grandf = -\frac{m}{2}\omega^2\left(2x\vec{i} + 2y\vec{j}\right) = -m\omega^2 R\left(\cos\omega t\vec{i} + \sin\omega t\vec{j}\right).$$

Модуль силы реакции –

$$\left|\vec{N}\right| = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = m\omega^2 R.$$

Направляющие косинусы

$$\cos\left(\widehat{\vec{N}, \vec{i}}\right) = N_x/N = -\cos\omega t,$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{N}, \vec{j}}\right) = N_y/N = -\sin\omega t,$$

а сила реакции $\vec{N}$ направлена перпендикулярно оси Oz.

Список литературы

1. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1983. – 640 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРУЗА ПРИ НАЛИЧИИ НЕУДЕРЖИВАЮЩЕЙ СВЯЗИ С ИЗМЕНЯЕМОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

Федюнина М.А.

Тульский государственный университет, Тула, e-mail: tm@tsu.tula.ru

Рассмотрим движение груза M массой m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити бесконечной длины, намотанной на неподвижный цилиндр радиуса r. В положении устойчивого равновесия длина свободной части нити равна l_0 (рис. 1), размерами груза пренебрегаем.

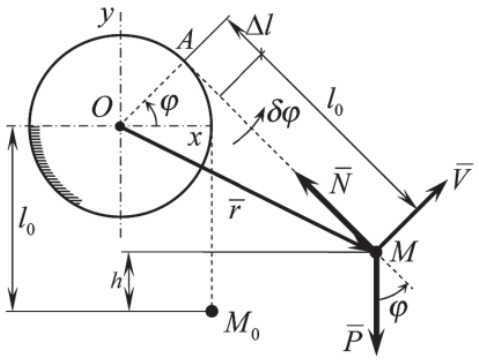

Рис. 1. Расчетная схема

В произвольный момент времени положение материальной точки определим радиус-вектором $\bar{r}$, в качестве обобщенной координаты примем ее угол отклонения от положения устойчивого равновесия φ. Кроме силы тяжести $\bar{P}$ на точку действует идеальная связь – нерастяжимая нить (рис. 1), действие которой, заменим ее реакцией – силой натяжения $\bar{N}$.

Дифференциального уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{\varphi}}\right) - \frac{dT}{d\varphi} = -\frac{d\ddot{I}}{d\varphi}, \tag{1}$$

здесь T – кинетическая энергия, $\ddot{I}$ – потенциальная энергия.

$$T = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m\left(l_0 + r\varphi\right)^2\dot{\varphi}^2. \tag{2}$$

Здесь $V = l = \left(l_0 + \Delta l\right)\dot{\varphi} = \left(l_0 + r\varphi\right)\dot{\varphi}$ – скорость материальной точки,

$$\ddot{I} = mgh,$$

где $h = y - y_0 = l_0 + r\sin\left(\varphi\right) - l\cos\left(\varphi\right)$, тогда

$$\ddot{I} = mg\left[l_0 + r\sin\varphi - \left(l_0 + r\varphi\right)\cos\varphi\right]. \tag{3}$$

Подставляя выражения (2), (3) в уравнение Лагранжа (1) получим дифференциальное уравнение движения груза

$$\left(l_0 + r\varphi\right)\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi}^2 + g\sin\varphi = 0. \tag{4}$$

Начальные условия для уравнения (4) имеют вид

$$\varphi\big|_{t=0} = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}\big|_{t=0} = \dot{\varphi}_0. \tag{5}$$

Движение материальной точки будет описываться дифференциальным уравнением (4) с начальными условиями (5) до тех пор, пока связь, наложенная на данную точку, остается удерживающей, т. е. выполняется условие $x^2 + y^2 + l^2$ или $N \geq 0$. Кроме этого, должно выполняться дополнительное условие

$$l_0 + r\varphi > 0 \quad \text{или} \quad \varphi > \frac{l_0}{r} = -\alpha_{\text{кр}}, \tag{6}$$