

Рис. 4. Интенсивность деформаций

На рис. 5 показана диаграмма пластичности стали У10А (кривая 1) и траектория нагружения образца (кривая 2), из которого следует, что материал не достиг предельной степени деформации и значение критерия разрушения $\psi = 0,65$.

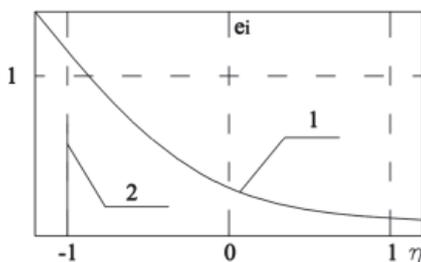


Рис. 5. Диаграмма пластичности

Изменение усилия в процессе нагружения показано на рис. 6.

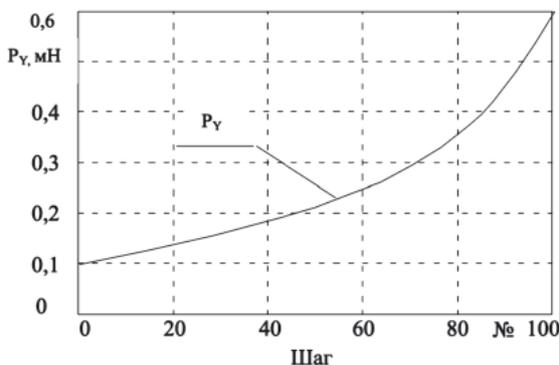


Рис. 6. Усилие процесса осадки

В целом, можно сделать вывод, что результаты анализа, произведенного с помощью программы на основе МКЭ, корректны и имеют хорошую сходимость с известными экспериментальными и расчетными данными для случая одноосного сжатия.

Список литературы

1. Гун Г.Я. Математическое моделирование обработки металлов давлением: учебное пособие. – М.: Металлургия, 1983. – 352 с.
2. Ресурс пластичности металлов при обработке металлов давлением / А.А. Богатов, О.И. Мирицкий, С.В. Смирнов. – М.: Металлургия, 1984. – 144 с.

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОТ МАТРИЦ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

Сиськова Д.Ю., Рудакова П.Н., Матвеева Т.А., Светличная В.Б.
 Волжский Политехнический институт (филиал),
 Волгоградского государственного технического университета, Волжский, e-mail: Danyka06@mail.ru

Спектральный анализ линейных операторов имеет целый ряд важных применений в классической механике (особенно теории колебаний), электродинамике, квантовой механике, дифференциальных и интегральных уравнений и других областях математики и математической физики.

Пусть функция $f(\lambda)$ определена на спектре квадратной матрицы A ,
 $\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$ – минимальный многочлен A .

Тогда спектральное разложение матрицы $f(A)$ имеет вид

$$f(A) = \sum_{k=1}^s [f(\lambda_k) Z_{k1} + f'(\lambda_k) Z_{k2} + \dots + f^{(n_k-1)}(\lambda_k) Z_{kn_k}] \quad (1)$$

В данной работе рассмотрим построение спектрального разложения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и его применения к вычислению функций от матриц, решение систем линейных однородных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Найдем минимальный многочлен матрицы A – последний инвариантный множитель матрицы $(A - \lambda E)$: $|A - \lambda E| = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$ – характеристический многочлен.

Следовательно, НОД миноров 3 порядка:

$$d_3(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3).$$

Найдем делители всех миноров 2-го порядка матрицы A :

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda);$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2-\lambda \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 8-3\lambda.$$

Т.к. данные миноры 2-го порядка взаимно простые, то $d_2(\lambda) = 1$.

Следовательно, минимальный многочлен

$$\phi(x) = \frac{d_3(\lambda)}{d_2(\lambda)} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3).$$

По формуле (1) для любой функции $f(\lambda)$, определенной на спектре матрицы A , имеем

$$f(A) = Z_{11}f(2) + Z_{12}f'(2) + Z_{21}f(3).$$

Полагая в этом разложении поочередно $f(\lambda) = 1$; $f(\lambda) = (\lambda - 2)$; $f(\lambda) = (\lambda - 2)^2$, приходим к системе матричных уравнений

$$\begin{cases} E = Z_{11} + Z_{21}, \\ A - 2E = Z_{12} + Z_{21}, \\ Z_{21} = (A - 2E)^2, \end{cases}$$

из которой находим компоненты Z_{11}, Z_{12}, Z_{21} .

Таким образом, спектральное разложение матрицы A примет вид:

$$f(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot f(2) + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot f'(2) + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot f(3). \quad (2)$$

Спектральное разложение очень удобно, если требуется вычислить несколько функций от одной и той же матрицы.

Например, вычислим значение функции от матрицы $\sin(\pi A)$. При $f(\lambda) = \sin(\pi\lambda)$ имеем $f(2) = 0, f'(2) = \pi, f(3) = 0$. Следовательно,

$$f(A) = \sin(\pi A) = \pi \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим другое применение спектрального анализа – это решение систем ОДУ с постоянными коэффициентами $Y' = AY$, где $A = (a_{ij})_{n \times n}$ – матрица коэффициентов.

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Тогда по формуле $Y = e^{At} \cdot (C_1, C_2, C_3)^T$ находим общее решение системы ОДУ

$$\begin{cases} y_1 = e^{2t} (c_1(e+t) + c_2(e-1-t) + c_3(e-1)) \\ y_2 = e^{2t} (c_1(e-1+t) + c_2(e-t) + c_3(e-1)) \\ y_3 = e^{2t} (c_1(1-e-2t) + c_2(1-e+2t) + c_3(2-e)). \end{cases}$$

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ИДЕАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Тарасов А.Е., руководитель Сметанин Б.И.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону,
e-mail: alextarasov@yandex.ru

В работе рассматриваются вынужденные колебания круговой цилиндрической оболочки конечных размеров в идеальной сжимаемой жидкости. Для решения полученной системы интегрального и дифференциального уравнений применен метод разложения решения в ряд по собственным формам колебаний оболочки в вакууме и метод ортогональных многочленов. Проведено численное исследование полученных результатов.

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \frac{Eh}{R^2} w + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(R+0, z, t) - p(R-0, z, t) \quad (|z| \leq a). \quad (1)$$

Здесь E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, h – толщина оболочки, $w = w(z, t)$ – радиальное перемещение точек срединной поверхности оболочки, ρ_0 – плотность оболочки, $p = p(r, z, t)$ – гидродинамическое давление.

Жесткость оболочки при изгибе D связана с параметрами E, ν , и h формулой:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (2)$$

Перемещения, направленные к оси оболочки, считаются положительными. На торцах оболочки считаем заданными радиальные перемещения и углы поворота. Граничные условия имеют вид:

$$w = h C_1 e^{-i\omega t}; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \mp C_2 e^{-i\omega t} \quad (z = \pm a), \quad (3)$$

где $C_1, C_2 = \text{const}$

Движение жидкости предполагается потенциальным. Потенциал скоростей точек жидкости $\phi = \phi(r, z, t)$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Здесь c – скорость звука в жидкости.

Гидродинамическое давление p в предположении малости вносимых оболочкой возмущений связано с

Решение системы $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$, удовлетворяющее начальным условиям

$$Y|_{t=0} = (y_{10}, \dots, y_{n0})^T = Y_0,$$

находится по формуле

$$Y = e^{At} Y_0.$$

Если в качестве y_{i0} брать произвольные постоянные C_i ($i = 1, 2, \dots, n$), то $Y = e^{At} Y_0$ – общее решение системы.

Найдем общее решение системы ОДУ: $Y' = AY$, где A – исходная матрица.

Вычислим e^{At} с помощью спектрального разложения (2). При $f(\lambda) = e^{\lambda t}$ имеем $f(2) = e^{2t}, f'(2) = te^{2t}, f(3) = e^{3t}$. Получаем

Задачи гидроупругости представляют большой теоретический и практический интерес. При исследовании этих задач появляется возможность выявить взаимное влияние жидкости и контактирующей с ней упругой конструкции. В [1] даны постановки и методы решения широкого круга задач гидроупругости, приведен список литературы, отражающий положение дел в рассматриваемой области.

Пусть упругая круговая цилиндрическая оболочка длины $2a$, радиуса R помещена в идеальную сжимаемую жидкость, занимающую безграничный объем. Ось Oz цилиндрической системы координат r, θ, z направим вдоль оси оболочки. При исследовании взаимодействия оболочки с жидкостью будем исходить из уравнения технической теории оболочек [2]:

функцией ϕ интегралом Коши, который в линеаризованной форме имеет вид

$$p = p_\infty - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (5)$$

где ρ – плотность жидкости, p_∞ – давление на бесконечности.

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=R-0} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=R+0} = -\frac{\partial w}{\partial t} \quad (r=R, |z| \leq a). \quad (6)$$

Условие безотрывного обтекания оболочки имеет вид:

Будем предполагать справедливым следующее представление функций

$$\begin{aligned} w(z, t) &= w_*(z) e^{-i\omega t}; \\ \phi(r, z, t) &= \phi_*(r, z) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (7)$$

Получили систему двух уравнений в безразмерном виде:

$$\begin{cases} w^{IV}(z) + (\alpha - \omega^2) w(z) = -\beta \omega^2 \int \gamma(z) dz \\ \int_{-1}^1 \gamma(\eta) d\eta \int_0^\infty L(u) \sin(u \frac{\eta-z}{\lambda}) du = 2\pi \lambda w_*(z) \end{cases} \quad (8)$$

Где

$$L(u) = 2 \frac{(u^2 - S^2)}{u} K_1(\sqrt{u^2 - S^2}) I_1(\sqrt{u^2 - S^2}) \rightarrow 1, \quad \text{при } u \rightarrow 0,$$