ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Серегина В.А.

Тульский государственный университет, Тула, e-mail: tm@tsu.tula.ru

Построение разрешающих уравнений МКЭ для решения задач механики деформируемых сред базируется на соответствующих вариационных принципах и вытекает из задачи оптимизации некоторой интегральной величины (функционала).

$$J = N_Д + N_М + N_В,$$

где $N_Д$ – работа или мощность внутренних сил, – работа или мощность, развиваемая массовыми силами, $N_В$ – работа или мощность внешних сил.

Простейшим элементом, применяемым для решения осесимметричной задачи механики деформируемого твердого тела, является тороидальный элемент с тремя узлами, расположенными в вершинах треугольного сечения (рис. 1).

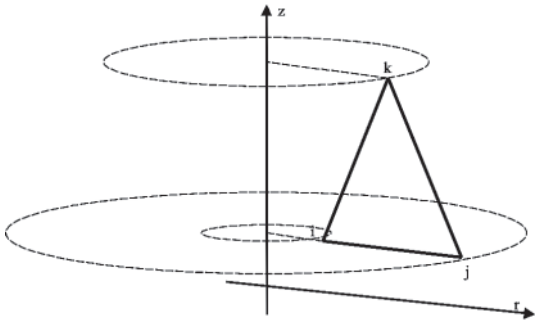

Рис. 1. Конечный элемент в задаче осесимметричной деформации

Произвольная точка элемента получает перемещения u_r и u_z в направлении осей r и z. Поэтому матрица u имеет вид:

$$u = \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \end{bmatrix}.$$

Деформированное состояние в любой точке тела описывается тензором малых деформаций Коши:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right).$$

Вектор напряжений σ имеет вид:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix}.$$

В пределах упругости связь между приращениями напряжений и деформаций выражается законом Гука. Согласно ему компоненты приращений деформаций являются линейными функциями приращений напряжений.

Для учета влияния истории деформирования для простого нагружения, примем за меру повреждений ψ выражение:

$$\psi = \int_0^{e_i'} \frac{de_i}{e_p(\eta)},$$

где e'_i – степень деформации к рассматриваемому моменту, e_p – предельная деформация, определяемая по диаграмме пластичности.

Добавление в конечно-элементную модель критерия деформируемости позволило проводить контроль разрушения заготовки во время моделирования технологической операции радиального обжатия, а также прогнозировать состояние готового изделия.

Для оценки работоспособности математической модели и программного комплекса была решена задача об осадке цилиндрического образца, диаметром 20 мм., начальной высотой 20 мм из стали У10А. При исследовании процесса осадки рассматривали часть меридионального сечения осесимметричной заготовки, которую разбивали на 8 конечных элементов в виде треугольной сетки. Схема осаживаемой заготовки с нанесенной на ней сеткой конечных элементов представлена на рис. 2.

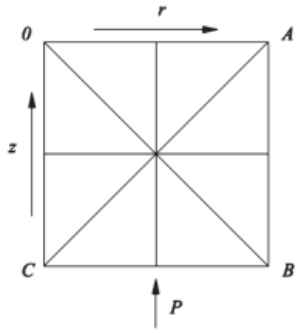

Рис. 2. Схема процесса

При решении задачи на узлы накладывался ряд граничных условий, определяющих возможность их перемещения в различных направлениях.

Деформирующая нагрузка задавалась в виде перемещения, которое составляло 50% от начальной высоты заготовки. Результаты анализа представлены в виде графиков, отражающих картину распределение напряжений и деформаций по сечению образца.

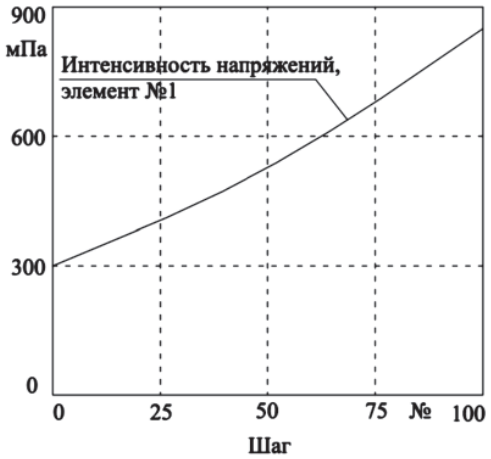

Рис. 3. Интенсивность напряжений

Так в случае осесимметричной осадки существует одно ненулевое напряжение, которое совпадает с интенсивностью напряжений, что и было проиллюстрировано на рис. 3.

График изменения интенсивности деформаций для конечного элемента №2 приведен на рис. 4. Он носит возрастающий характер, что соответствует существу процесса одноосного сжатия, и достигает на последнем шаге счета значения 70%. Аналогичные графики получаются также для всех 8 элементов, составляющих конечно-элементную сетку. Данный факт подтверждает вывод об однородности интенсивности деформаций по сечению образца.

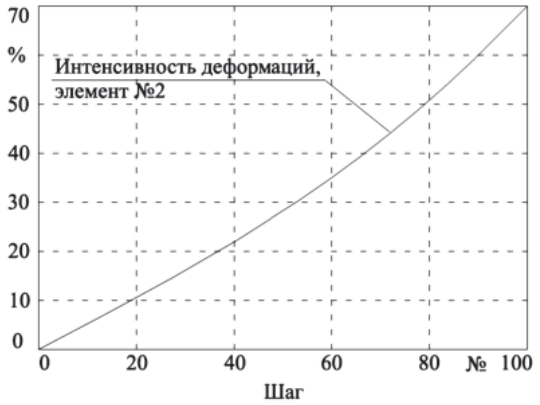

Рис. 4. Интенсивность деформаций

На рис. 5 показана диаграмма пластичности стали У10А (кривая 1) и траектория нагружения образца (кривая 2), из которого следует, что материал не достиг предельной степени деформации и значение критерия разрушения ψ = 0,65.

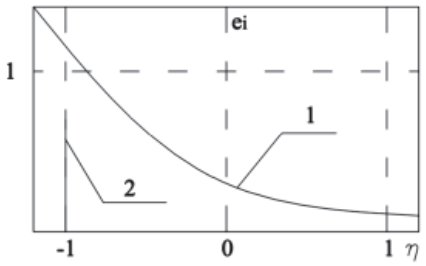

Рис. 5. Диаграмма пластичности

Изменение усилия в процессе нагружения показано на рис. 6.

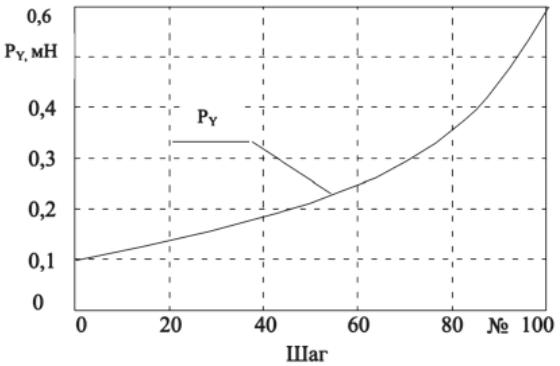

Рис. 6. Усилие процесса осадки

В целом, можно сделать вывод, что результаты анализа, произведенного с помощью программы на основе МКЭ, корректны и имеют хорошую сходимость с известными экспериментальными и расчетными данными для случая одноосного сжатия.

Список литературы

1. Гун Г.Я. Математическое моделирование обработки металлов давлением: учебное пособие. – М.: Металлургия, 1983. – 352 с.

2. Ресурс пластичности металлов при обработке металлов давлением / А.А. Богатов, О.И. Мирицкий, С.В. Смирнов. – М.: Металлургия, 1984. – 144 с.

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОТ МАТРИЦ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

Сиськова Д.Ю., Рудакова П.Н., Матвеева Т.А., Светличная В.Б.

Волжский Политехнический институт (филиал), Волгоградского государственного технического университета, Волжский, e-mail: Danyka06@mail.ru

Спектральный анализ линейных операторов имеет целый ряд важных применений в классической механике (особенно теории колебаний), электродинамике, квантовой механике, дифференциальных и интегральных уравнений и других областях математики и математической физики.

Пусть функция $f(\lambda)$ пределена на спектре квадратной матрицы A,

$\phi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$ – минимальный многочлен A.

Тогда спектральное разложение матрицы $f(A)$ имеет вид

$$f(A) = \sum_{k=1}^{s}\left[f(\lambda_k)Z_{k1} + f'(\lambda_k)Z_{k2} + \ldots + f^{(n_k-1)}(\lambda_k)Z_{kn_k}\right] \quad (1)$$

В данной работе рассмотрим построение спектрального разложения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и его применения к вычислению функций от матриц, решение систем линейных однородных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Найдем минимальный многочлен матрицы A – последний инвариантный множитель матрицы $(A - \lambda E)$: $|A-\lambda E| = -(\lambda-2)^2(\lambda-3)$ – характеристический многочлен.

Следовательно, НОД миноров 3 порядка:

$$d_3(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3).$$

Найдем делители всех миноров 2-го порядка матрицы A:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda);$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2-\lambda \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 8-3\lambda.$$

Т.к. данные миноры 2-го порядка взаимно простые, то $d_2(\lambda) = 1$.

Следовательно, минимальный многочлен

$$\phi(x) = \frac{d_3(\lambda)}{d_2(\lambda)} = (\lambda-2)^2(\lambda-3).$$

По формуле (1) для любой функции $f(\lambda)$, определенной на спектре матрицы A, имеем

$$f(A) = Z_{11}f(2) + Z_{12}f'(2) + Z_{21}f(3).$$

Полагая в этом разложении поочередно

$f(\lambda) = 1$; $f(\lambda) = (\lambda - 2)$; $f(\lambda) = (\lambda - 2)^2$,

приходим к системе матричных уравнений

$$\begin{cases} E = Z_{11} + Z_{21}, \\ A - 2E = Z_{12} + Z_{21}, \\ Z_{21} = (A-2E)^2, \end{cases}$$

из которой находим компоненты Z_{11}, Z_{12}, Z_{21}.

Таким образом, спектральное разложение матрицы A примет вид:

$$f(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot f(2) + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot f'(2) + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot f(3). \quad (2)$$