

ем показателя преломления, и тонкий слой высоко-температурного сверхпроводника YBaCuO. Проведен расчет коэффициентов отражения и пропускания от данной структуры. Результаты численного расчета показывают, что рассматриваемая структура может использоваться для создания фильтра, работающего в ИК и оптическом диапазоне.

**Список литературы**

1. Головкина М.В. Особенности распространения электромагнитных волн в периодических структурах полупроводник – сверхпроводник // Вестник Поморского государственного университета, серия Естественные науки. – 2009. – № 3. – С. 70-75.
2. Pryce I., Aydin K., Kelaita Y., Briggs R., Atwater H. Highly Strained Compliant Optical Metamaterials with Large Frequency Tunability // Nano Lett. – 2010. – Vol. 10. – P. 4222–4227.

**ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИИ СОСТОЯНИЯ**

Пономарёв Ю.И., Зеленский А.В.

*Оренбургский государственный педагогический университет, Оренбург, e-mail: Ponomarev\_ogpu@mail.ru*

В работе Пономарёва [1] был предложен метод получения основного уравнения механики с помощью введения в ней функции состояния. Такой подход позволяет в отличие от использования традиционного принципа наименьшего действия проще получить уравнение Лагранжа.

Введём в рассмотрение функцию состояния  $\Pi$  которая описывает состояние исследуемой частицы и зависит от  $q_i, \dot{q}_i(t), t$  где  $q_i(t)$  это обобщённая координата с индексом  $i$ , а  $\dot{q}_i$  отличается от  $q_i(t)$  только тем что  $\dot{q}_i$  это функция только от начального времени

$$d\Pi = \sum(\partial\Pi/\partial q_i) dq_i + \sum(\partial\Pi/\partial \dot{q}_i)(dq_i/dt) dt + (\partial\Pi/\partial t) dt.$$

Введём следующие обозначения:  $p_i = \partial\Pi/\partial \dot{q}_i$ ,

$$W = -\partial\Pi/\partial t, L = \sum(\partial\Pi/\partial \dot{q}_i)(dq_i/dt) dt + (\partial\Pi/\partial t) dt,$$

Из этого следует:

$$L = p_1(dq_1/dt) + p_2(dq_2/dt) + \dots + p_m(dq_m/dt) - W, (1)$$

где  $W$  – это полная энергия,  $p_1, p_2, \dots, p_m$  – обобщённые импульсы.

Обозначим через  $\sum$  суммирование всех элементов с индексом  $i$ . Так например в книге Г. Голдстейна «Классическая механика» пишется :

$$H(p, q, t) = \sum(dq_i/dt)p_i - L(q, dq/dt, t)$$

где  $H$  – это функция Гамильтона.

Рассмотрим случай когда  $H = W$ . Поэтому:

$$L = \sum(dq_i/dt)p_i - ((1/2)\sum(dq_i/dt)p_i + F) = (1/2)\sum(dq_i/dt)p_i - F. (2)$$

В книге Г. Голдстейна «Классическая механика» пишется что эта формула выполняется когда система консервативна, а кинетическая энергия является однородной квадратичной функцией от обобщённых скоростей. Где  $F$  – это потенциальная энергия а  $\sum$  – это суммирование всех элементов с индексом  $i$ .

С учётом того что в большинстве случаев обобщённый импульс зависит не более чем от производной первого порядка от соответствующей обобщённой координаты то согласно формуле 2 мы получаем:

$$\partial L/\partial(dq_i/dt) = p_i.$$

Дифференциал  $d\Pi$  будет полным дифференциалом если смешанные частные производные от  $\Pi$  по её аргументам не будут зависеть от порядка дифференцирования.

Например

$$\partial p_i/\partial t = \partial L/\partial q_i.$$

Так как мы имеем дело с полной функциональной производной то с учётом формулы  $\partial L/\partial(dq_i/dt) = p_i$  получаем уравнение Лагранжа :

$$d(\partial L/\partial(dq_i/dt))/dt = \partial L/\partial q_i.$$

**Список литературы**

1. Пономарёв Ю.И. Функция состояния в классической механике и теории поля // Успехи современного естествознания. – 2008.
2. Голдстейн Г. Классическая механика: монография. – М.: Наука, 1975.

**БИОМЕХАНИКА ПЕРЕГРУЗОК И НЕВЕСОМОСТИ**

Попова А.И.

*Тульский государственный университет, Тула, e-mail: tm@tsu.tula.ru*

Девочка раскачивает сама себя на качелях (рис. 1). Внешними силами данной системы являются сила тяжести и натяжения веревок. Каким образом действия указанных сил приводят к увеличению амплитуды колебаний, и каким образом увеличивается механическая энергия системы? Механической моделью данной системы является математический маятник (рис. 2). Маятник может (теоретически) совершать и незатухающие колебания, но увеличивать амплитуду колебаний маятник сам по себе не может. Человек, находящийся на качелях, может прилагать определенные усилия и взаимодействовать с качелями, но все это будут внутренние силы, которые не могут изменить движение центра масс системы [1].



Рис. 1. Девочка на качелях

Но, тем не менее, человек на качелях может раскачать сам себя и обеспечить амплитуду колебаний до 360°, особенно если использовать не веревку, а жесткий стержень. В основе этого лежит физическое явление, называемое параметрическим резонансом. Меняя свое положение относительно точки подвеса, человек меняет длину маятника. Если менять длину маятника по периодическому закону, то при определенном соотношении частот возникает параметрический резонанс и амплитуда колебаний увеличивается. Изобразим расчетную схему (рис. 2).

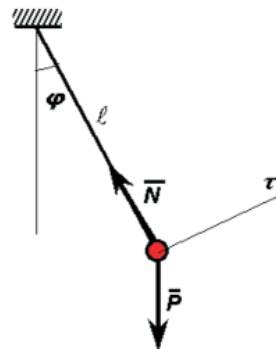


Рис. 2. Расчетная схема

Дифференциальное уравнение движения

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Пусть длина маятника меняется по закону

$$l = l_0 + h \sin \omega t.$$

Тогда уравнение принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{(l_0 + h \sin \omega t)} \sin \varphi = 0.$$

Это уравнение нелинейное и зависимость угла  $\varphi$  от времени в виде графика (рис. 3).

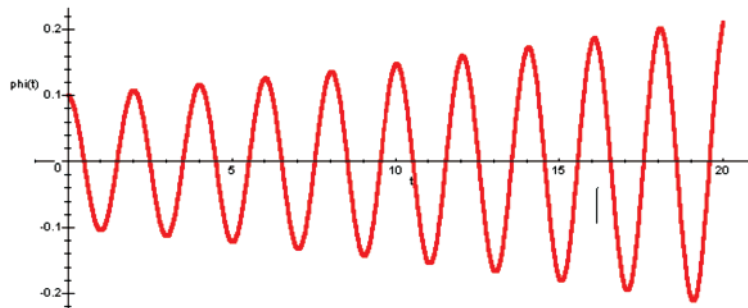


Рис. 3. Зависимость изменения угла  $\varphi$  от времени

Из анализа графика следует, что амплитуда колебаний увеличивается с течением времени, причем система близка к резонансу. Изменим частоту колеба-

ний длины маятника, увеличив ее в пять раз. Результаты представлены на рис. 4. Как видно из графика, нет резонанса и нет никакого увеличения амплитуды.

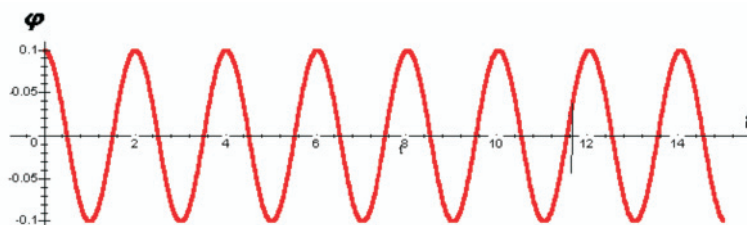


Рис. 4. Расчётная схема

Очевидно, что при увеличении амплитуды увеличивается и максимальная кинетическая энергия системы за счет работы внутренних сил, т.е. качели раскачиваются за счет внутренней энергии того человека, который качается на качелях.

Определим натяжения веревок и проанализируем полученные результаты (рис. 2). Считая груз, подвешенный на нити, материальной точкой, составим дифференциальное уравнение движения в проекции на нормаль к траектории:

$$m\dot{\varphi}^2 \ell = N - mg \cos \varphi,$$

откуда

$$N = m\dot{\varphi}^2 \ell + mg \cos \varphi.$$

Пусть амплитуда колебаний равна  $90^\circ$ . В этом случае в момент максимального отклонения маятника от положения равновесия второе слагаемое равно нулю. Применительно к качелям это означает состояние невесомости для качающегося человека. Наоборот, в момент прохождения качелями положения равновесия

$$N = m\dot{\varphi}^2 \ell + mg.$$

В этом случае реакция опоры больше силы тяжести и на человека действует перегрузка. Таким образом, при качании на качелях невесомость и перегрузки поочередно сменяют друг друга.

И то, и другое явление вредно для здоровья. Трудно себе представить, что можно качаться на качелях несколько часов подряд. А вот на кораблях люди ходят по морю по несколько месяцев. Качка корабля отрицательно влияет на человека, вызывая морскую болезнь. По воздействию на человека корабль – это

те же качели, только эти «качели» нельзя остановить в любой момент.

Перегрузки также являются злейшим врагом летчиков и космонавтов. Рассмотрим ещё один случай перегрузки – пикирование сверхзвукового самолёта (рис. 5). Скорость самолета 400 м/с и радиус кривизны его траектории при выходе и пике составляет 2000 м. Определить перегрузку, которой в этот момент подвергается пилот самолета.

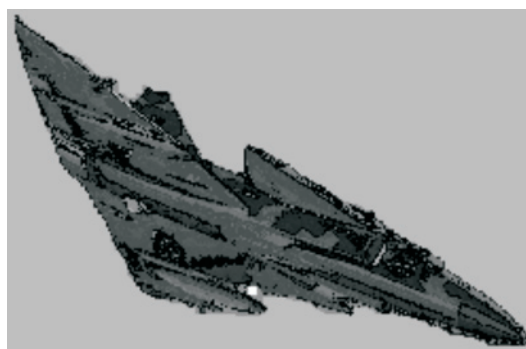


Рис. 5. Сверхзвуковой самолёт

Ускорение пилота

$$a = \frac{V^2}{R}.$$

На пилота действуют сила тяжести  $mg$  и реакция опоры  $N$ . Заметим, что никакой центробежной силы на пилота не действует. Равнодействующая указанных сил сообщает ускорение пилоту. Дифференци-

альное уравнение движения в проекции на нормаль к траектории

$$\frac{mV^2}{R} = N - mg,$$

откуда

$$N = mg \left( 1 + \frac{V^2}{Rg} \right).$$

Перегрузка составит

$$k = \frac{N}{mg} = \left( 1 + \frac{V^2}{Rg} \right) = 9.$$

Такая перегрузка является опасной. Большинство проблем ракетостроения направлено именно на то, чтобы уменьшить ускорение при старте и в то же время получить космическую скорость.

Определим время действия перегрузки на пилота. Будем считать, что восьмикратная перегрузка является опасной.

Уравнение движения в проекции на нормаль к траектории:

$$\frac{mV^2}{R} = N - mg \cos \varphi.$$

При восьмикратной перегрузке

$$\cos \varphi = 8 - \frac{V^2}{gR}.$$

После вычислений найдем угол  $\varphi = 100^\circ$ . Таким образом, при перегрузке не менее 8 самолет описывает дугу  $200^\circ$ , что соответствует дуге:

$$S = \frac{200}{180} \cdot 3,14 \cdot 2000 = 6978 \text{ м.}$$

При скорости 400 м/с это занимает 17 с. Без специальной, предварительной подготовки, такую перегрузку выдержать трудно.

**Список литературы**

1. Тарасов В.К. Механика: учебн. пособие для вузов.– Тула: Изд-во ТулГУ, 2007.

**РАСЧЕТ СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ С ОДНОСТОРОННИМИ ВНУТРЕННИМИ СВЯЗЯМИ В СРЕДЕ MATHCAD**

Раев А.В.

Тульский государственный университет, Тула, e-mail: tm@tsu.tula.ru

Рассматривается равновесие составной конструкции (рис. 1), имеющей внутренние односторонние связи в точках E и F [1]. Требуется:

1) выяснить, какая из связей работает, т.е. в какой из точек E или F при заданной нагрузке имеет место контакт (на рисунке показаны зазоры в обоих случаях), а также определить реакции связей;

2) определить область значений угла  $\alpha$ , в точках которой  $R_E > 0$ , и область значений этого угла, в точках которой  $R_F > 0$ .

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0 \\ \sum F_{iy} = 0 \\ \sum M_C(\bar{F}_i) = 0 \end{cases} \left\| \begin{cases} -X'_C + X_D - R_E + P_1 \sin \alpha = 0, \\ -Y'_C + Y_D - P_1 \cos \alpha = 0, \\ -X_D(a+b) + Y_D 2(a+b) + R_E a - M - P_1(a+b) \sin \alpha = 0. \end{cases} \right. \quad (2)$$

Расчетная схема для тела EFDL приведена на рис. 4. Заметим, что  $\bar{X}'_D = -\bar{X}_D$ ,  $\bar{Y}'_D = -\bar{Y}_D$ ,  $\bar{R}'_E = -\bar{R}_E$ .

Уравнения равновесия сил, действующих на тело CD, имеют вид:

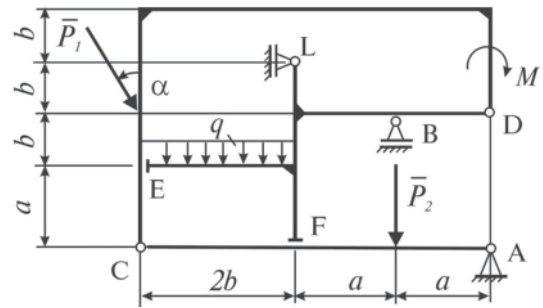


Рис. 1

Предполагая, что контакт осуществляется в точке E, расчленим конструкцию на составляющие ее тела AC, CD, EFDL и рассмотрим равновесие каждого тела отдельно; при этом действие связей заменяем их реакциями. На каждое тело действует уравновешенная плоская система сил. Расчетная схема для тела AC приведена на рис. 2.

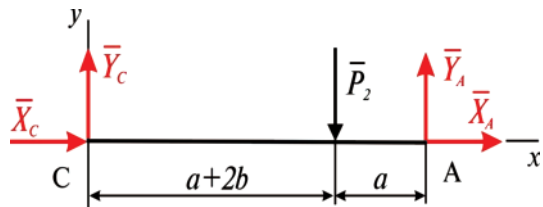


Рис. 2

Уравнения равновесия сил, действующих на тело CD, имеют вид:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0 \\ \sum F_{iy} = 0 \\ \sum M_A(\bar{F}_i) = 0 \end{cases} \left\| \begin{cases} X_A + X_C = 0, \\ Y_A + Y_C - P_2 = 0, \\ -2Y_C(a+b) + P_2 a = 0. \end{cases} \right. \quad (1)$$

Расчетная схема для тела CD приведена на рис. 3. Заметим, что  $\bar{X}'_C = -\bar{X}_C$ ,  $\bar{Y}'_C = -\bar{Y}_C$ .

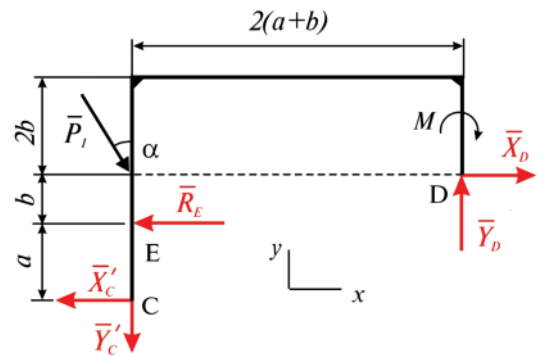


Рис. 3

Уравнения равновесия сил, действующих на тело CD, имеют вид: