Разлагая соѕф в ряд

$$1 - \cos \varphi \approx \varphi^2/2$$

получи]м формулу потенциальной энергии

$$\Pi \approx \frac{1}{2} Mg \left(1 l \varphi_1^2 + l' \varphi_2^2\right).$$

Выразим углы ϕ_1 и ϕ_2 через θ_1 и θ_2 , считая малые перемещения концов стержней за дуги окружностей

$$a\theta_1 = l\phi_1; \quad a\theta_2 = l'\phi_2;$$

или

$$\varphi_{1} = \frac{1}{2} mg \left(\frac{2a^{2}}{l} \theta_{1}^{2} + \frac{a^{2}}{l'} \theta_{2}^{2} \right).$$
 (3)

Уравнение Лагранжа для обобщённых координат $q_1 = \theta_1$ и $q_2 = \theta_2$ для формул (1) и (3) будут:

$$2i_{Z...}^{2}\ddot{\theta}_{1} + i_{Z...}^{2}\ddot{\theta}_{2} + \frac{2ga^{2}}{l}\theta_{1} = 0;$$

$$2i_{Z...}^{2}\ddot{\theta}_{1} + i_{Z...}^{2}\ddot{\theta}_{2} + \frac{ga^{2}}{l'}\theta_{2} = 0.$$
(4)

Полагая

$$\theta_1 = A\cos(\lambda t + \varepsilon)$$
 и $\theta_2 = B\cos(\lambda t + \varepsilon)$

получаем уравнения:

$$\left(2i_Z^2\lambda^2 - \frac{2}{l}ga\right)A + i_Z^2\lambda B = 0;$$

$$2i_Z^2\lambda^2 A + \left(i_Z^2\lambda - \frac{ga}{c}\right)B = 0.$$

Тогда характеристическое уравнение имеет вид

$$2\left(i_Z^2\lambda - \frac{ga^2}{l}\right)\left(i_Z^2\lambda^2 - \frac{ga^2}{l'}\right) - i_Z^4\lambda^4 = 0$$

или

$$\lambda^4 - \frac{2ga^2}{k^2} \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l'} \right) \lambda^2 + \frac{2g^2a^4}{ll'i_a^4} = 0,$$

откуда и найдутся частоты λ_1 и λ_2 главных колебаний.

Список литературы
1. Розе Н.В. Аналитическая механика. – Л.: 1938 –203 с.

КИНЕМАТИКА ШАРНИРА ГУКА

Козлов Ю.Ю.

Тульский государственный университет, Тула, e-mail: tm@tsu.tula.ru

Примером движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки может служить движение крестовины шарнира Гука. Шарнир Гука широко применяется в машиностроении (рис. 1).



Рис. 1. Карданный вал автомобиля

Двигатель автомобиля и связанная с ним коробка передач подвешены относительно кузова на упругих опорах. Задний мост с главной передачей также может иметь перемещения относительно кузова. Таким образом вал коробки передач и вал главной передачи не находятся на одной оси даже при неподвижном автомобиле. А при движении автомобиля указанные оси непрерывно меняют свою ориентацию в пространстве. Шарнир Гука служит для передачи вращений между валами, оси которых пересскаются, причём угол ● между осями валов может изменяться. А комбинация из двух шарниров позволяет передавать движения между скрещивающимися осями, как это показано на рис. 1.

Как видно из рис. 1 и 2, валы заканчиваются соответственно вилками, причем каждая вилка снабжена двумя муфтами, общая ось которых пересекает ось соответствующего вала под прямым углом.

В муфты входят шипы прямоугольной крестовины. Оси крестовины AB и CD взаимно перпендикулярны, и точка их пересечения 0 совпадает с точкой пересечения осей валов. При вращении ведущего вала I с помощью крестовины приводится во вращение вал II. Если оси валов неподвижны, то крестовина совершает сферическое движение вокруг неподвижного центра O (рис. 3). При известном законе движения ведущего вала $\phi_1 = f(t)$ требуется определить угол поворота ϕ_2 и угловую скорость ω_2 ведомого вала.

Принимая за начало координат неподвижную точку крестовины, составим расчетную схему и направим координатные оси как показано на рис. 3, 4.

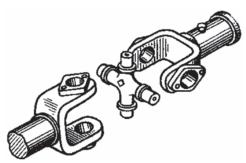


Рис. 2. Муфты и крестовина

Для установления зависимостей между углами ϕ_1 и ϕ_2 строим таблицу направляющих косинусов между осями подвижной и неподвижной системами координат. После преобразования получим:

	x'	<i>y'</i>	z'
x	cosαcosφ ₂	$cos\phi_1$	a_{13}
у	$\sin \phi_2$	$sin\phi_1$	a ₂₃
Z	sinαcosφ,	0	a_{33}

Элементы третьего столбца этой таблицы не вычислены. Для определения угла поворота ϕ_2 это не требуется. Далее заметим, что в таблице направляющих косинусов скалярное произведение двух любых строчек и двух любых столбцов равно нулю. Это есть условие перпендикулярности соответствующих осей.

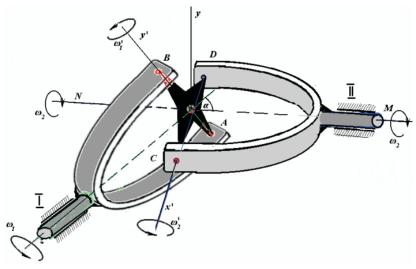


Рис. 3. Схема движения крестовины

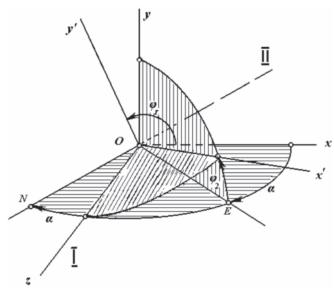


Рис. 4. Углы Эйлера

Применяя условие перпендикулярности осей Ox'и Oy', получим

 $\cos\alpha\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2=0,$

откуда

$$tg\,\varphi_2 = -\cos\alpha \cdot ctg\,\varphi_1,\tag{1}$$

где $\varphi_1 = f(t)$.

Уравнение (1) есть кинематическое уравнение вращения ведомого вала. При равномерном вращении ведущего вала

$$\phi_{\scriptscriptstyle 1} = \omega_{\scriptscriptstyle 1} t \quad \text{if} \ \ \text{tg} \, \phi_{\scriptscriptstyle 2} = - \operatorname{ctg} \left(\omega_{\scriptscriptstyle 1} t \right) \, \cos \alpha.$$

2. Определение угловой скорости ω_2 ведомого вала.

Дифференцируя (1) по времени и считая α = const, после преобразования будем иметь:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi_1},\tag{2}$$

где $\omega_1 = \dot{\varphi}_1$.

Таким образом, угловая скорость ведомого вала зависит не только от угловой скорости но и от угла поворота ведущего вала. При равномерном вращении ведущего вала ω_1 = const и при α = const угловая ско-

рость ω_2 будет функцией угла ϕ_1 , т.е. ведомый вал будет вращаться неравномерно.

Передаточное отношение

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi_1}.$$
 (3)

При заданном угле α передаточное отношение будет максимальным при $\phi_1=0,\,\pi,\,2\pi,\,...,\,$ т.е. при совпадении плоскости ведущей вилки с плоскостью, содержащей оси валов. Максимальное значение передаточного отношения

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)_{\text{max}} = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Минимальное значение передаточного отношения достигается при $\phi_1=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$, т.е. когда плоскость

ведущей вилки перпендикулярна к плоскости, содержащей оси валов:

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)_{\min} = \cos\alpha.$$

Таким образом, отношение скоростей заключено в интервале

$$\cos \alpha \le \frac{\omega_2}{\omega_1} \le \frac{1}{\cos \alpha}.$$

На рис. 5 изображены два графика зависимости передаточного отношения от угла поворота ведущего вала при $\alpha = 0,1$ рад и при $\alpha = 0,5$ рад.

Из сравнения двух кривых видно, что при увеличении угла увеличивается неравномерность вращение ведомого вала. Для характеристики неравномерности вращение ведомого вала используется коэффициент

$$k = \frac{\omega_{2\text{max}} - \omega_{2\text{max}}}{\omega_{1}} = \text{tg}\alpha \cdot \sin\alpha,$$

называемый коэффициентом неравномерности передачи.

Очевидно, что при $\alpha = 0$ коэффициент k = 0. Для малых углов α коэффициент k незначителен, ас возрастанием α коэффициент k резко увеличивается, достигая при 90° бесконечности, т.е. движение становится невозможным.

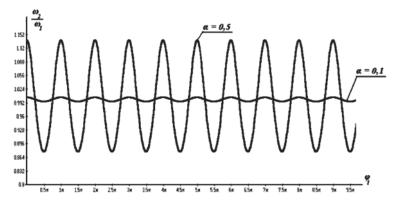


Рис. 5. Зависимость передаточного отношения от угла поворота ведущего вала

Это обстоятельство значительно уменьшает область применимости карданной передачи. Она с успехом применяется на «классике», а для автомобиля с передним приводом такая передача не подходит.

Список литературы

1. Тарасов В.К. Курс теоретической механики для математи-ков. – ТулГУ, 2008. – 300 с.

ВЛИЯНИЕ ОСТАТОЧНЫХ МАКРОНАПРЯЖЕНИЙ НА ПРОЦЕСС ЗАРОЖДЕНИЯ КВАЗИХРУПКИХ ТРЕЩИН В ТЕРМОДИФФУЗИОННЫХ ПОКРЫТИЯХ

Лукьянонов Д.С.

Тульский государственный университет, Тула, e-mail: tm@tsu.tula.ru

В процессе нанесения термодиффузионных покрытий и последующего охлаждения в «белых» слоях и диффузионных зонах формируются остаточные технологические макронапряжения $\sigma_{\text{ост}}$. В базовых уравнениях для концентрационных макронапряжений о, определяющих кинетику зарождения квазихрупких трещин при трении скольжения, знак и уровень $\sigma_{_{
m oct}}$ – фактора нормируется некоторым численным п-критерием.

Для низкотемпературных химико-термических слоев максимальные технологические напряжения можно корректно описать уравнением гиперболы в зависимости от толщины «белого» слоя h_{co} , и глубины диффузионных зон $h_{_{\mathrm{II}3}}$

$$\sigma_{\text{ocr}}^{\text{max}} = E \cdot \Delta T \cdot \frac{\beta_{\text{e,n}} - \beta_{E}}{1 + K \left(h_{\text{e,n}} / h_{E} \right)}, \tag{1}$$

где ΔT — изменение температуры в процессе охлаждения после насыщения; $\beta_{\rm ca}$ и $\beta_{\rm ga}$ — коэффициенты линейного расширения материалов покрытия и основы соответственно. Если учитывать фактор наложения на температурную эпюру макронапряжений «структурного» распределения $\sigma_{\text{ост}}$ уравнение (1) трансформируется к следующей функции общего вида

$$\sigma_{--}^{\text{max}} = K_1 h_{-}^2 + K_2 h_{-} + K_3. \tag{2}$$

 $\sigma_{\text{ост}}^{\text{max}} = K_1 h_{\text{сл}}^2 + K_2 h_{\text{сл}} + K_3.$ (2) Величины $\sigma_{\text{ост}}^{\text{пов}}$ и $\sigma_{\text{ост}}^{\text{max}}$ для всех типов термодиффузионных слоев экспериментально определялись стандартными методами. Для боридных покрытий показано, что максимальные сжимающие напряжения соответствуют более тонким слоям. С возрастанием толщины покрытия максимальные внутренние напряжения смещаются вглубь от поверхности.

В общем случае суммарная плотность трещин $\rho_{_{\rm Tp}}$ в месте повреждения покрытия возрастает с увеличением энергии ударного импульса q. Нелинейную взаимообусловленность этих параметров количественно оценивали некоторой характеристикой трещиностойкости α_{py} , определяемой по углу наклона линеаризированной функции « $\rho_{rp}-q$ ». На рис. 1 представлено распределение плотности трещин для никотрированного покрытия с толщиной слоя 10 мкм (температура насыщения 580°C, время выдержки – 4 часа)

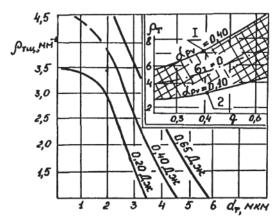


Рис. 1. Характер распределения плотности трещин

Удельная плотность трещин в покрытияхизменяется в функции расстояния от кратера согласно гипотетической аппроксимации типа:

$$\rho_{\rm rp} = \frac{\rho_0}{B - (1/d^n)},\tag{3}$$

в которой степенной показатель п коррелирует с угловым коэффициентом α_{nv} , отражающим знак макронапряжений в никотрированном слое и пропорциональным их уровню. Стойкость материалов против разрушения определяется их физическими констан-