на рис. 3), выявила существенную неоднородность смещений на мезоуровне, по сравнению со средним макрополем. Полосы локализованной деформации выражены значительно сильнее для кластерного распределения. Блочная делимость показана на рис. 7. На заключительном этапе деформирования образуется макросдвиг вдоль сформировавшейся магистральной трещины, отмеченной овалом, на рис. 6.

Рис. 6. Полосы локализованной неупругой деформации. Кластерное распред. 15%

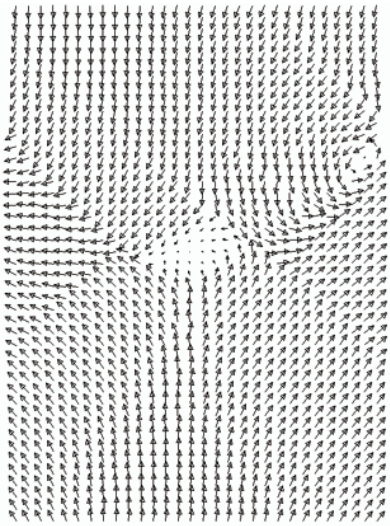


Рис. 7. Поле смещений на мезоуровне для кластерного распределения 15%

Заключение

В результате численных экспериментов изучены особенности деформирования композитов на стадии предразрушения. Получены поля смещений, картины полос локализованной неупругой деформации и НДС. Наличие кластеров существенно повышает масштаб формирующихся мезотрещин. Существенно увеличивается процентное содержание локальных областей, подвергнутых растяжению, при общем сжимающем характере нагрузки.

Список литературы

1. Макаров П.В. Математическая теория эволюции нагружаемых твердых тел и сред // Физическая мезомеханика. – 2008. – Т. 11, №3 – С. 19-35.

2. Кульков С.Н. Структура, фазовый состав и механические свойства наносистем на основе // Физическая мезомеханика. – 2007. – Т. 10, №3 – С. 81-94.

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Ерёмичева А.Н.

Тульский государственный университет, Тула, e-mail: tm@tsu.tula.ru

Рассматриваются крутильные колебания двух стержней, подвешенных на вертикальных нитях в горизонтальной плоскости. При закручивании стержней они поднимаются, но скорость поднятия будет величиной второго порядка малости, поэтому при определении кинетической энергии были введены некоторые упрощения. Задача решена с помощью уравнений Лагранжа. Получены формулы для определения частот главных колебаний [1].

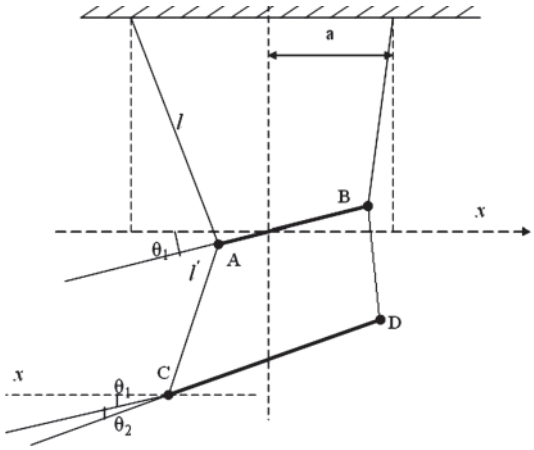
Горизонтальный однородный стержень *AB* массой «*M*», подвешен на двух вертикальных нитях длины *l*, второй стержень *CD* одинаковой массы «*M*» подвешен к *AB* на двух равных нитях длиной *l′* (см. рисунок).

Положение стержня *AB* относительно оси определяется углом θ_1, а положение стержня *CD* относительно *AB* углом θ_2, тогда положение стержня *CD* относительно оси *x* определяется суммой $\theta_1 + \theta_2$.

При закручивании стержней оба они поднимаются, но поскольку перемещения центров масс стержней вдоль оси *Z* несоизмеримо меньше их горизонтальных перемещений, то квадраты скоростей, входящие в формулу кинетической энергии, будут величинами второго порядка малости, поэтому кинетическая энергия системы определяется формулой

$$T = \frac{1}{2}Mi_Z^2\left[\dot{\theta}_1^2 + \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2\right] = \frac{1}{2}Mi_Z^2\left(2\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2\right); \quad (1)$$

здесь i_z – радиус инерции стержня относительно оси *z*, проходящей через центр масс стержней (см. рисунок).



Расчётная схема

Потенциальная энергия системы будет иметь вид:

$$\Pi = -Mg(Z_1 + Z_2) + C; \quad (2)$$

здесь Z_1 и Z_2 – координаты центров тяжести стержней, а константа *C* определяется из начальных условий.

При $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ в положении равновесия: $Z_1 = l_1$, $Z_2 = l + l'$, $\Pi = 0$, тогда из формулы (2)

$$0 = -Mg(l + l + l') + C \quad \text{или} \quad C = Mg(l + l + l'),$$

и формула (2) принимает вид:

$$\Pi = Mg[(l - Z_1) + (l + l' - Z_2)].$$

Обозначая через φ_1 и φ_2 углы, составляемые нитями подвески стержней с осью Z_1, получим

$$Z_1 = \cos\varphi_1; \quad Z_2 = l\cos\varphi_1 + l'\cos\varphi_2.$$

Разлагая cosφ в ряд

$$1 - \cos\varphi \approx \varphi^2/2$$

получи]м формулу потенциальной энергии

$$\Pi \approx \frac{1}{2} Mg\left(1l\varphi_1^2 + l'\varphi_2^2\right).$$

Выразим углы φ_1 и φ_2 через θ_1 и θ_2, считая малые перемещения концов стержней за дуги окружностей

$$a\theta_1 = l\varphi_1; \quad a\theta_2 = l'\varphi_2;$$

или

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} mg\left(\frac{2a^2}{l}\theta_1^2 + \frac{a^2}{l'}\theta_2^2\right). \qquad (3)$$

Уравнение Лагранжа для обобщённых координат $q_1 = \theta_1$ и $q_2 = \theta_2$ для формул (1) и (3) будут:

$$\begin{aligned} &2i_{Z\ldots}^2\ddot{\theta}_1 + i_{Z\ldots}^2\ddot{\theta}_2 + \frac{2ga^2}{l}\theta_1 = 0; \\ &2i_{Z\ldots}^2\ddot{\theta}_1 + i_{Z\ldots}^2\ddot{\theta}_2 + \frac{ga^2}{l'}\theta_2 = 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Полагая

$$\theta_1 = A\cos(\lambda t + \varepsilon) \text{ и } \theta_2 = B\cos(\lambda t + \varepsilon)$$

получаем уравнения:

$$\left(2i_Z^2\lambda^2 - \frac{2}{l}ga\right)A + i_Z^2\lambda B = 0;$$

$$2i_Z^2\lambda^2 A + \left(i_Z^2\lambda - \frac{ga}{c}\right)B = 0.$$

Тогда характеристическое уравнение имеет вид:

$$2\left(i_Z^2\lambda - \frac{ga^2}{l}\right)\left(i_Z^2\lambda^2 - \frac{ga^2}{l'}\right) - i_Z^4\lambda^4 = 0$$

или

$$\lambda^4 - \frac{2ga^2}{k^2}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l'}\right)\lambda^2 + \frac{2g^2a^4}{ll'i_Z^4} = 0,$$

откуда и найдутся частоты λ_1 и λ_2 главных колебаний.

Список литературы

1. Розе Н.В. Аналитическая механика. – Л.: 1938 –203 с.

КИНЕМАТИКА ШАРНИРА ГУКА

Козлов Ю.Ю.

Тульский государственный университет, Тула, e-mail: tm@tsu.tula.ru

Примером движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки может служить движение крестовины шарнира Гука. Шарнир Гука широко применяется в машиностроении (рис. 1).

Рис. 1. Карданный вал автомобиля

Двигатель автомобиля и связанная с ним коробка передач подвешены относительно кузова на упругих опорах. Задний мост с главной передачей также может иметь перемещения относительно кузова. Таким образом вал коробки передач и вал главной передачи не находятся на одной оси даже при неподвижном автомобиле. А при движении автомобиля указанные оси непрерывно меняют свою ориентацию в пространстве. Шарнир Гука служит для передачи вращений между валами, оси которых пересекаются, причём угол • между осями валов может изменяться. А комбинация из двух шарниров позволяет передавать движения между скрещивающимися осями, как это показано на рис. 1.

Как видно из рис. 1 и 2, валы заканчиваются соответственно вилками, причем каждая вилка снабжена двумя муфтами, общая ось которых пересекает ось соответствующего вала под прямым углом.

В муфты входят шипы прямоугольной крестовины. Оси крестовины *AB* и *CD* взаимно перпендикулярны, и точка их пересечения 0 совпадает с точкой пересечения осей валов. При вращении ведущего вала I с помощью крестовины приводится во вращение вал II. Если оси валов неподвижны, то крестовина совершает сферическое движение вокруг неподвижного центра *O* (рис. 3). При известном законе движения ведущего вала $\varphi_1 = f(t)$ требуется определить угол поворота φ_2 и угловую скорость ω_2 ведомого вала.

Принимая за начало координат неподвижную точку крестовины, составим расчетную схему и направим координатные оси как показано на рис. 3, 4.

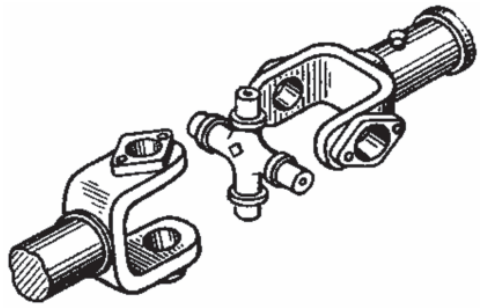


Рис. 2. Муфты и крестовина

Для установления зависимостей между углами φ_1 и φ_2 строим таблицу направляющих косинусов между осями подвижной и неподвижной системами координат. После преобразования получим:

	x'	y'	z'
x	$\cos\alpha\cos\varphi_2$	$\cos\varphi_1$	a_{13}
y	$\sin\varphi_2$	$\sin\varphi_1$	a_{23}
z	$\sin\alpha\cos\varphi_2$	0	a_{33}

Элементы третьего столбца этой таблицы не вычислены. Для определения угла поворота φ_2 это не требуется. Далее заметим, что в таблице направляющих косинусов скалярное произведение двух любых строчек и двух любых столбцов равно нулю. Это есть условие перпендикулярности соответствующих осей.