

придем к каноническому разложению матрицы A

$$A = B\Lambda B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим пример решения системы линейных уравнений $AX = D$, где $D = (1, 1, 0)^T$, с помощью канонического разложения матрицы A .

Подставим в исходную систему $AX = D$ каноническое разложение матрицы и получим $B\Lambda B^{-1}X = D$. Умножим обе части уравнения слева на B^{-1} и введем замену $B^{-1}X = Z$.

Тогда

$$\Lambda Z = B^{-1}D$$

или

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 1, \\ z_2 = 0, \\ z_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$A^5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & - \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 243 & -242 & 242 \\ 242 & -241 & 242 \\ 242 & -242 & 243 \end{pmatrix}$$

Таким образом, каноническое разложение матрицы позволяет сократить вычисления при решении многих задач, имеющих практическое значение.

ЧИСЛЕННОЕ ИЗУЧЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ КЕРАМИЧЕСКИХ КОМПОЗИТОВ НА СТАДИИ ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ

Еремин М.О., Макаров П.В.

Томский государственный университет, Томск, e-mail: bacardi@sibmail.com

Новые технологии зачастую порождают необходимость создания новых материалов, обладающих повышенными прочностными свойствами. Одними из таких материалов является керамики, получаемые, в том числе, прессованием субмикрорекристаллических порошков диоксида циркония ZrO_2 . Его уникальностью является возможность управления свойствами конечного продукта, варьированием свойствами самого порошка, а также процентным содержанием и размерами упрочняющих частиц. Соответствующие технологии получения подобных керамик позволяют достигать в них уникальных прочностных характеристик. Эти свойства достигаются также применением дополнительных воздействий на исходные порошки [2]. С этой же целью при прессовании систем на основе диоксида циркония вводятся стабилизирующие добавки в виде оксидов некоторых металлов (магния, иттрия, алюминия). При спекании удается получать керамики с различной пористостью, обеспечивающей высокую степень деформации. На соответствующих σ - ϵ диаграммах наблюдаются резкие сбросы напряжений, связанные с микрорастрескиванием, обусловленным пористостью [2] (как показано на рис. 1).

В данной работе численно изучены особенности деформирования подобных систем на основе диоксида циркония ZrO_2 , стабилизированных оксидом алюминия Al_2O_3 . Для моделирования была создана модель композита, в которой матрица представляет собой сплошную беззеренную структуру с физико-механическими свойствами диоксида циркония ZrO_2 , стабилизированная включениями с физико-механическими свойствами корунда - Al_2O_3 .

$$X = BZ = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

- единственное решение системы линейных уравнений $AX = D$.

Если известно каноническое разложение $A = B\Lambda B^{-1}$ матрицы A , то ее m -я степень при натуральном числе m находится по формуле

$$A^m = B\Lambda^m B^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{pmatrix} \cdot B^{-1}$$

Вычислим A^5 , используя данную формулу:

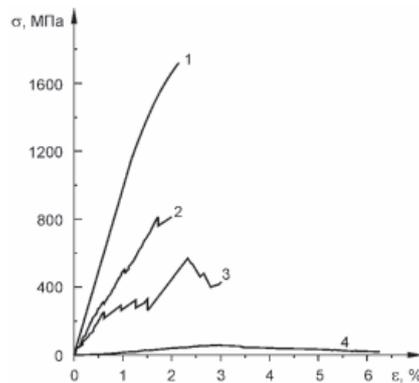


Рис. 1. Диаграмма сжатия керамики ZrO_2 , стабилизированной Y_2O_3 , с различной пористостью (1 - 2%, 2 - 15%, 3 - 26%, 4 - более 60%)

Модели композитов и постановка задачи

Соответствующая пористость в предложенных моделях композита (рис. 2, 3) учтена неявно наличием соответствующего неупругого участка на σ - ϵ диаграмме, что соответствует графику 1 на рис. 1. Наличие неупругого участка в зависимости σ - ϵ также связывается со способностью частично стабилизированной керамики к фазовому переходу - мартенситному превращению из тетрагональной фазы в моноклинную.

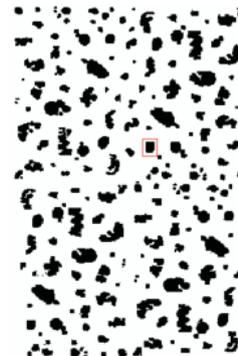


Рис. 2. Равномерное распределение стабилизирующей фазы 15%



Рис. 3. Кластерное распределение стабилизирующей фазы 15%

Было проведено численное моделирование отклика на сжимающее нагружение образцов композитов, оно осуществлялось решением уравнений механики сплошных сред с приведением напряжений на каждом временном слое к кругу текучести Мизеса с использованием схемы второго порядка точности Лакса-Вендроффа.

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0; \quad \rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j};$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\rho} p_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}; \quad \dot{p}_{ij} = \lambda \dot{\theta} \delta_{ij} + 2\mu (\dot{\varepsilon}_{ij}^T - \dot{\varepsilon}_{ij}^P);$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^T = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right); \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^P = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_{int}^P}{p_{int}} S_{ij},$$

где $\dot{\varepsilon}_{int}^P$, p_{int} – вторые инварианты скорости пластических деформаций и напряжений соответственно.

Результаты моделирования и обсуждения

В результате численных экспериментов по изучению эволюции структуры образцов в ходе нагружения получены картины распределения областей растяжения, сжатия, сдвига, выявлен общий характер НДС с использованием параметра Лоде-Надаи, для его визуализации в мезообъеме. По полям смещений удается установить эволюцию структуры на различных масштабах мезоскопического уровня в диапазоне 0,1-10 мкм.

Особенности напряженного состояния были выявлены по параметру Лоде-Надаи. Получены следующие результаты. При равномерном распределении упрочняющих частиц (рис. 2) в матрице преобладают сдвиги, упрочняющие частицы (примерно половина) находятся в состоянии сжатия, другая половина в состоянии сжатие-сдвиг. При этом НДС в отдельной частице также неоднородно: например, половина объема частицы находится в состоянии сжатия, а вторая половина в состоянии сдвига или сжатия-сдвига. Более того, на границах упрочняющих частиц наблюдаются локальные области растяжения, однако их доля мала при равномерном распределении частиц.

Макро-поля смещений, совпадают с вектором внешней сжимающей нагрузки, что затрудняет анализ характера течения. Локальные поля смещений были получены вычитанием среднего вектора смещений, относительно изучаемого локального объема. На рис. 2 отмечен квадратом соответствующий локальный объем, а на рис. 5 представлено поле смещений относительно него. Эволюция поля смещений на стадии предразрушения показала, что на мезоуровне НДС меняется периодически. В процессе нагружения наблюдается смена сжатий на сдвиги, сдвиг сменяется растяжением. Формируются вихревые структуры, на более поздних стадиях происходит стабилизация

НДС и выявляется характерная блочная структура мезоуровня. На рис. 4 представлена картина распределения полос локализованной неупругой деформации, обусловленной микрповреждениями среды. Видно, что на заключительном этапе деформирования образца, когда формируется блочная мезоструктура, происходит формирование мезо и макротрещин, ориентированных по направлению действия максимальных касательных напряжений. Магистральная трещина отмечена овалом.



Рис. 4. Полосы локализованной неупругой деформации. Равномерное распредел. 15%

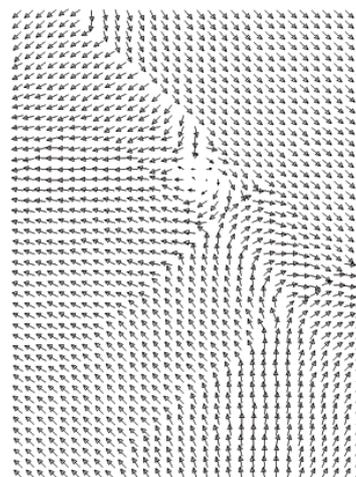


Рис. 5. Поле смещений на мезоуровне для равномерного распределения 15%

На рис. 3 приведен пример кластерного распределения частиц в композите.

При кластерном распределении картина эволюции НДС качественно изменилась. Параметр Лоде-Надаи охватывает весь спектр от -1 до $+1$, существенно увеличился размер областей, охваченных только сжатиями или сдвигами или растяжениями. Причем локализованные области сжатия наблюдаются теперь и в матрице. Значительная часть приграничных областей матрица-включение находятся в состоянии локального растяжения.

Более ярко выражена неоднородность НДС. Формируется макротрещина, проходящая через весь образец.

Эволюция поля смещений, относительно выбранного локального объема (отмеченного квадратом

на рис. 3), выявила существенную неоднородность смещений на мезоуровне, по сравнению со средним макрополем. Полосы локализованной деформации выражены значительно сильнее для кластерного распределения. Блочная делимость показана на рис. 7. На заключительном этапе деформирования образуется макросдвиг вдоль сформировавшейся магистральной трещины, отмеченной овалом, на рис. 6.



Рис. 6. Полосы локализованной неупругой деформации. Кластерное распр. 15%

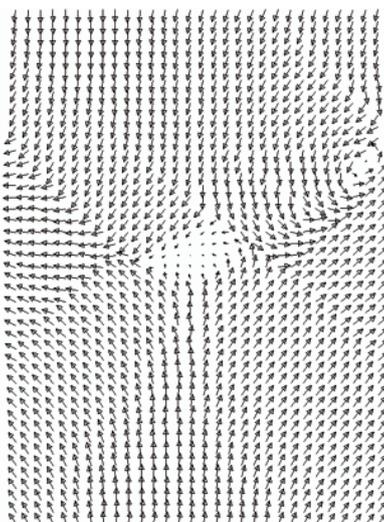


Рис. 7. Поле смещений на мезоуровне для кластерного распределения 15%

Заключение

В результате численных экспериментов изучены особенности деформирования композитов на стадии предразрушения. Получены поля смещений, картины полос локализованной неупругой деформации и НДС. Наличие кластеров существенно повышает масштаб формирующихся мезотрещин. Существенно увеличивается процентное содержание локальных областей, подвергнутых растяжению, при общем сжимающем характере нагрузки.

Список литературы

1. Макаров П.В. Математическая теория эволюции нагружаемых твердых тел и сред // Физическая мезомеханика. – 2008. – Т. 11, №3 – С. 19-35.
 2. Кульков С.Н. Структура, фазовый состав и механические свойства наносистем на основе // Физическая мезомеханика. – 2007. – Т. 10, №3 – С. 81-94.

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Ерёмичева А.Н.

Тульский государственный университет, Тула, e-mail: tm@tsu.tula.ru

Рассматриваются крутильные колебания двух стержней, подвешенных на вертикальных нитях в горизонтальной плоскости. При закручивании стержней они поднимаются, но скорость поднятия будет величиной второго порядка малости, поэтому при определении кинетической энергии были введены некоторые упрощения. Задача решена с помощью уравнений Лагранжа. Получены формулы для определения частот главных колебаний [1].

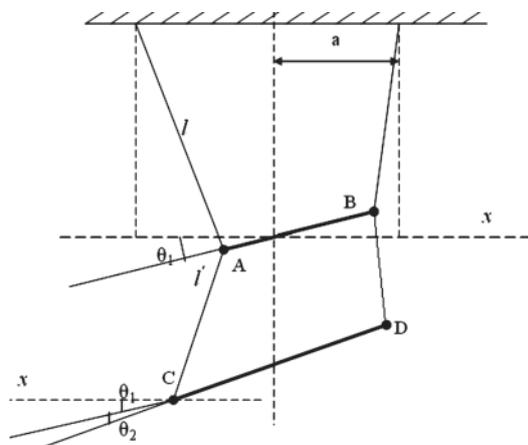
Горизонтальный однородный стержень *AB* массой «*M*», подвешен на двух вертикальных нитях длины *l*, второй стержень *CD* одинаковой массы «*M*» подвешен к *AB* на двух равных нитях длиной *l'* (см. рисунок).

Положение стержня *AB* относительно оси определяется углом θ_1 , а положение стержня *CD* относительно *AB* углом θ_2 , тогда положение стержня *CD* относительно оси *x* определяется суммой $\theta_1 + \theta_2$.

При закручивании стержней оба они поднимаются, но поскольку перемещения центров масс стержней вдоль оси *Z* несоизмеримо меньше их горизонтальных перемещений, то квадраты скоростей, входящие в формулу кинетической энергии, будут величинами второго порядка малости, поэтому кинетическая энергия системы определяется формулой

$$T = \frac{1}{2} Mi_z^2 [\dot{\theta}_1^2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2] = \frac{1}{2} Mi_z^2 (2\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2); \quad (1)$$

здесь i_z – радиус инерции стержня относительно оси *z*, проходящей через центр масс стержней (см. рисунок).



Расчётная схема

Потенциальная энергия системы будет иметь вид:

$$\Pi = -Mg(Z_1 + Z_2) + C; \quad (2)$$

здесь Z_1 и Z_2 – координаты центров тяжести стержней, а константа *C* определяется из начальных условий.

При $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ в положении равновесия: $Z_1 = l$, $Z_2 = l + l'$, $\Pi = 0$, тогда из формулы (2)

$$0 = -Mg(l + l + l') + C \text{ или } C = Mg(l + l + l'),$$

и формула (2) принимает вид:

$$\Pi = Mg[(l - Z_1) + (l + l' - Z_2)].$$

Обозначая через φ_1 и φ_2 углы, составляемые нитями подвески стержней с осью Z_1 , получим

$$Z_1 = l \cos \varphi_1; \quad Z_2 = l \cos \varphi_1 + l' \cos \varphi_2.$$