$$M_j = \alpha \frac{\kappa \hat{p}_{dj} A_{\min}^{(j)}}{a_s} \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} q\left(\frac{p_{dj}^2}{\hat{p}_{dj}^2} \right). \qquad (6.2)$$

Зная расходы газа, строим комплексный потенциал и определяем поле давлений в смазочном слое. Далее можно исследовать влияние неравномерного поддува на интегральные характеристики опоры. При этом расчет может быть произведен для фиктивного потока без возвращения к реальной плоскости, но с использованием якобиана перехода

$$J = \left| \frac{d\varsigma}{dz} \right|^2 = R_H^2 e^{-2\eta}.$$

Так, например, несущая способность газостатической кольцевой опоры вычисляется по формуле:

$$F = R_H^2 \int_0^{LB}\int_0^{0} e^{-2\eta} \left[P(\xi, \eta) - p_a \right] d\xi d\eta. \qquad (7)$$

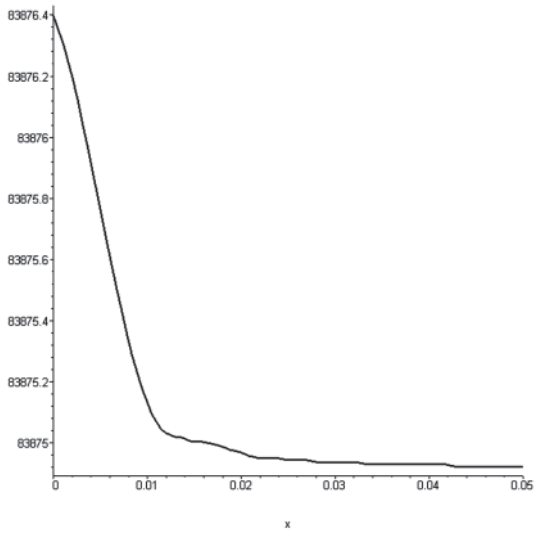
Можно в формуле для определения поля давлений вернуться к полярным координатам r, φ (для простоты вычислений) и найти центр давлений как центр параллельных сил:

$$x_ц = \frac{\int_0^{2\pi}\int_{R_B}^{R_H} r^2 \cos\theta P(r,\theta) dr d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_{R_B}^{R_H} r P(r,\theta) dr d\theta}. \qquad (8)$$

ПРИМЕР. Рассмотрим кольцевую газостатическую опору с внешним радиусом $R_H = 0{,}5$ м и внутренним – $R_B = 0{,}005$ м. Возьмем $N = 5$. Диаметры подводящих каналов равны $d0$ = [0,002; 0,008; 0,004; 0,01; 0,006] м, а диаметры «карманов» пусть будут в два раза больше, т.е. $d_j = 2 \cdot d0_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Координаты питателей и толщину смазочного слоя задают массивы r = [0,1; 0,46; 0,18; 0,34; 0,22] м, φ = [π/12, π/2, 5π/6, 5π/4, 11π/6], h = [0,01; 0,02; 0,03,; 0,04; 0,05] м. Давление на входе в питатели равняется двум атмосферным давлениям, т.е. $p_s = 2p_a$. Определим несущую способность и центр давлений этой опоры при данных величинах смазочного слоя.

С помощью метода конформных отображений переходим от кольцевой опоры к безграничной полосе ширины L, на которой расположены пять дорожек питателей. Определяем по схеме «двойного дросселирования» поля давлений на кромках питателей и расход газа. Строим комплексный потенциал для течения газа в смазочном слое, находим поле давлений.

Зависимость несущей способности (ось ординат, H) от толщины газового слоя (ось абсцисс, м) показана на графике:



На расположение центра давлений толщина смазочного слоя оказывает очень слабое влияние. На исследуемой опоре центр давлений располагается практически в начале координат ($x_ц \approx -0{,}003$; $y_ц \approx 10^{-6}$).

Список литературы

1. Снопов А.И. Методические указания к курсу «Динамика вязкой жидкости и газа» часть II – Ростов н/Д.: УПЛ РГУ, 1990. – С. 4–7, 16–26, 28–31.

2. Снопов А.И., Ларикова Н.А., Миронова Е.В. Моделирование газостатических опор с неравномерным дискретным поддувом // Современные проблемы науки и образования: Материалы конференции. – 2009. – №6. – С. 34–36.

КАНОНИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

Дьяконова К.С., Артамонов И.А., Макаров А.С, Матвеева Т.А.

Волжский Политехнический институт (филиал), Волгоградского государственного технического университета, Волжский, e-mail: lyohamakarov@yandex.ru

Приведение матриц к диагональному виду значительно упрощает решение многих прикладных задач, находит широкое применение при моделировании линейных динамических систем, при решении систем линейных алгебраических уравнений; каноническое разложение применяется для возведения матрицы в степень и нахождения обратной матрицы.

В данной работе рассматриваются вопросы построения канонического разложения матриц, его применение для решения систем линейных уравнений и возведения матриц в натуральную степень.

Построим каноническое разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для этого найдем корни характеристического многочлена матрицы A:

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 = -(\lambda - 1)^2 (\lambda - 3) = 0.$$

Следовательно, собственные значения матрицы A есть $\lambda_1 = 1$ (2-й кратности) и $\lambda_2 = 3$ (1-й кратности).

Т.к. алгебраические кратности собственных чисел совпадают с геометрическими кратностями, то матрица A приводима к диагональному (каноническому) виду.

Каждому собственному значению λ_k с учетом его кратности найдем соответствующие собственные векторы по формуле

$$(A - \lambda_k E)\,\overline{e}_k = 0.$$

Из полученных собственных векторов $\overline{e}_1 = \{1,1,0\}$, $\overline{e}_2 = \{-1,0,1\}$, $\overline{e}_3 = \{1,1,1\}$ составим собственный базис, в котором матрица A принимает диагональный вид

$$\Lambda = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

где $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица перехода от старого базиса к собственному базису $\{\overline{e}_k\}_{k=1}^{n}$.

Разрешив матричное уравнение $\Lambda = B^{-1}AB$ относительно матрицы A и вычислив матрицу

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

придем к каноническому разложению матрицы A

$$A = B\Lambda B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим пример решения системы линейных уравнений $AX = D$, где $D = (1, 1, 0)^T$, с помощью канонического разложения матрицы A.

Подставим в исходную систему $AX = D$ каноническое разложение матрицы и получим $B\Lambda B^{-1}X = D$. Умножим обе части уравнения слева на B^{-1} и введем замену $B^{-1}X = Z$.

Тогда

$$\Lambda Z = B^{-1}D$$

или

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 1, \\ z_2 = 0, \\ z_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$X = BZ = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

– единственное решение системы линейных уравнений $AX = D$.

Если известно каноническое разложение $A = B\Lambda B^{-1}$ матрицы A, то ее m-я степень при натуральном числе m находится по формуле

$$A^m = B\Lambda^m B^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{pmatrix} \cdot B^{-1}.$$

Вычислим A^5, используя данную формулу:

$$A^5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & - \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 243 & -242 & 242 \\ 242 & -241 & 242 \\ 242 & -242 & 243 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, каноническое разложение матрицы позволяет сократить вычисления при решении многих задач, имеющих практическое значение.

ЧИСЛЕННОЕ ИЗУЧЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ КЕРАМИЧЕСКИХ КОМПОЗИТОВ НА СТАДИИ ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ

Еремин М.О., Макаров П.В.

Томский государственный университет, Томск, e-mail: bacardi@sibmail.com

Новые технологии зачастую порождают необходимость создания новых материалов, обладающих повышенными прочностными свойствами. Одними из таких материалов является керамики, получаемые, в том числе, прессованием субмикрокристаллических порошков диоксида циркония ZrO_2. Его уникальностью является возможность управления свойствами конечного продукта, варьированием свойствами самого порошка, а также процентным содержанием и размерами упрочняющих частиц. Соответствующие технологии получения подобных керамик позволяют достигать в них уникальных прочностных характеристик. Эти свойства достигаются также применением дополнительных воздействий на исходные порошки [2]. С этой же целью при прессовании систем на основе диоксида циркония вводятся стабилизирующие добавки в виде оксидов некоторых металлов (магния, иттрия, алюминия). При спекании удается получать керамики с различной пористостью, обеспечивающей высокую степень деформации. На соответствующих σ–ε диаграммах наблюдаются резкие сбросы напряжений, связанные с микрорастрескиванием, обусловленным пористостью [2] (как показано на рис. 1).

В данной работе численно изучены особенности деформирования подобных систем на основе диоксида циркония ZrO_2, стабилизированных оксидом алюминия Al_2O_3. Для моделирования была создана модель композита, в которой матрица представляет собой сплошную беззеренную структуру с физико-механическими свойствами диоксида циркония ZrO_2, стабилизированная включениями с физико-механическими свойствами корунда – Al_2O_3.

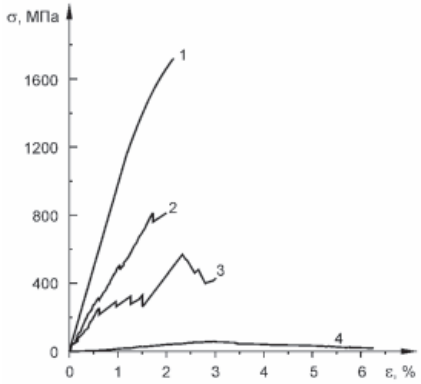


Рис. 1. Диаграмма сжатия керамики ZrO_2, стабилизированной Y_2O_3, с различной пористостью (1 – 2%, 2 – 15%, 3 – 26%, 4 – более 60%)

Модели композитов и постановка задачи

Соответствующая пористость в предложенных моделях композита (рис. 2, 3) учтена неявно наличием соответствующего неупругого участка на σ–ε диаграмме, что соответствует графику 1 на рис. 1. Наличие неупругого участка в зависимости σ–ε также связывается со способностью частично стабилизированной керамики к фазовому переходу – мартенситному превращению из тетрагональной фазы в моноклинную.

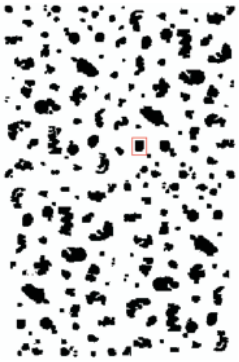


Рис. 2. Равномерное распределение стабилизирующей фазы 15%