Окончание табл. 3

1	2	3
$T^{-0,5}$	L^{-1}	Удельная электрическая проводимость
T^{0}	L^{0}	Количество электричества (электрический заряд) Магнитный поток (количество магнетизма) Электрическое сопротивление (активное, реактивное, полное) Электрическая проводимость (активная, реактивная, полная) Поток электрического смещения Магнитный момент (амперовский)
$T^{0,5}$	L	Абсолютная диэлектрическая проницаемость Абсолютная магнитная проницаемость Удельное электрическое сопротивление Магнитный момент (кулоновский) Электрический момент диполя
T	L^{2}	Индуктивность, взаимная индуктивность Электрическая емкость Магнитная проводимость

Несмотря на то, что системы единиц физических величин группы СБК (т.е. системы СБК-2LT, СБК-1T и СБК-1L) являются более простыми, чем система измерений СИ, из которой они были получены, – авторы этой работы не рассматривают системы группы СБК как альтернативные варианты системе СИ. По мнению авторов, использование системы СИ на практике в большинстве случаев является более удобным и рациональным, чем использование СБК-систем, описанных ими в [6, 5] и в данной статье. Однако СБК-системы представляют интерес с чисто научной (познавательной) точки зрения, лишний раз указывают на сложность, многогранность и, в то же время, четкую внутреннюю организацию и симметрию материи.

Список литературы

1. Бражников А.В., Юмшин Д.В., Хомич Л.В. Основные положения гидродинамической теории гравитационного взаимодействия и электромагнитных явлений // Молодежь и наука – третье тысячелетие: сборник материалов межрегиональной научной конференции. – Красноярск: Изд-во КРО НС «Интеграция», 2005. – С. 260-265.

2. Бражников А.В., Гилев А.В., Белозеров И.Р. Факты, свидетельствующие в пользу дипольно-тоннельной гидродинамической теории гравитационного взаимодействия и электромагнитных явлений // Фундаментальные исследования. – 2009. – № 5. – С. 9-10.

3. Бражников А.В., Белозеров И.Р. Закон бинарной комплементарности фундаментальных взаимодействий // Современные проблемы науки и образования. – 2010. – № 6 (приложение «Физико-математические науки»). – С. 4.

4. Бражников А.В., Белозеров И.Р. Постулаты о тождественности фундаментальных зарядов // Современные проблемы науки и образования. – 2010. – № 6 (приложение «Физико-математические науки»).– С. 5.

5. Бражников А.В., Белозеров И.Р. Система единиц физических величин СБК-2LT // Современные проблемы науки и образования. – 2010. – № 6 (приложение «Физико-математические науки»). – С. 6.

6. Бражников А.В., Белозеров И.Р. Системы единиц физических величин СБК-1T и СБК-1L // Современные проблемы науки и образования. – 2010. – № 6 (приложение «Физико-математические науки»). – С. 7.

7. Политехнический словарь / под ред. А.Ю. Ишлинского. – М.: Советская энциклопедия, 1989. – 656 с.

МОДЕЛЬ И ЗАКОНЫ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ СИСТЕМ

Гирлин С.К., Билюнас А.В.

Институт экономики и управления РВУЗ «Крымский гуманитарный университет», Ялта),
e-mail: zelen707@mail.ru

Одной из главных заслуг Ньютона являлось то, что он отдал количественным математическим законам предпочтение перед физическим объяснением явлений. «Отказ от физического объяснения и прямая замена его математическим описанием потрясли даже великих ученых. Гюйгенс считал идею гравитации «абсурдом», поскольку действие через пустое пространство исключало всякий механизм передачи силы; он поражался тем, что Ньютон взял на себя тяжкий труд и выполнил громоздкие вычисления, которые не обосновывались ничем, кроме математического принципа тяготения. Против чисто математического описания гравитации возражали и многие другие современники Ньютона, в том числе Лейбниц, который сразу, как только прочитал в 1690 г. ньютоновские «Начала», занял в отношении их резко критическую позицию и продолжал критиковать идею дальнодействия до самой своей смерти» [1, с. 69]. Известно, что Лаплас по поводу того, что Ньютон вместо физического объяснения дал количественную формулировку действия силы тяготения, заметил, что Ньютон доказал, что человек и стул одно и то же, «так как и у человека и у стула четыре конечности». Однако «существенное различие между механикой Ньютона и физикой его предшественников заключалось не во введении математики для описания движения тел. В ньютоновской механике математика была не только вспомогательным средством для физики, более удобным, кратким, ясным и общим языком, – она стала источником фундаментальных понятий. Гравитационная сила – не более чем название математического символа. Точно так же во втором законе Ньютона ($F = ma$: сила равна произведению массы тела на ускорение) под силой понимается все, что сообщает массе ускорение. При этом устанавливать физическими методами природу силы больше не было нужды» [1, с. 70]. Отметим следующее преимущество формулировки второго закона Ньютона перед формулировкой закона всемирного тяготения: первый закон носит характер причинно-следственной связи (сила, приложенная к телу, вызывает ускорение тела), в то время как второй закон устанавливает чисто функциональную связь между величиной силы тяготения и величинами масс двух тел, а также величиной расстояния между телами. По-видимому науке нужны законы как причинно-следственные, в которых изменение количества одних величин вызывает изменение количества некоторых других величин, так и чисто функциональные, в которых изменение количества одних величин (или количество одних величин) зависит от некоторого количества других величин. Считается, что причинно-следственные законы предпочтительнее функциональных (хотя первые, возможно, лишь создают иллюзию понимания причины того или иного явления) и в процессе развития науки желательно заменять функциональные законы на причинно-следственные.

Рассмотрев объект моделирования – экономическую систему как двухпродуктовую РС [3], выделим в нем две подсистемы: подсистему самосовершенствования А, в которой частью продуктов первого рода (материально, энергетически и информационно обеспечивающих внутреннюю функцию объекта моделирования – его существование и развитие) создаются новые, более эффективные (например, более производительные) продукты первого рода, и подсистему Б, в которой другой частью продуктов первого рода выполняется основная (внешняя) функция объекта моделирования – выпуск некоторых продуктов второго рода, материально, энергетически и информационно обеспечивающих эту внешнюю функцию и являющихся результатом взаимодействия этого объекта с внешней средой. Внутренними ресурсами РС будем считать продукты только первого рода, являющиеся источниками самих себя и продуктов второго рода. Внешними ресурсами РС будем называть продукты как первого, так и второго рода, поступающие в РС из внешней среды (при этом часть внешних ресурсов становится внутренними ресурсами РС).

В настоящей работе ставится и решается проблема формулировки причинно-следственных законов оптимального развития экономической системы. Под оптимальностью развития двухпродуктовой РС здесь понимается такое функционирование экономической системы на заданном временном отрезке планирования, при котором осуществляется максимизация выхода продуктов второго рода (обеспечивающих основную функцию экономической системы) посредством наилучшего распределения ресурсов экономической системы между подсистемами А (подсистемой самосовершенствования системы) и Б (подсистемой выполнения основной функции системы). Решение рассматриваемой оптимизационной задачи может интерпретироваться как достижение рекорда внешней функции экономической системы на заданном временном промежутке. По словам Л. Эйлера, «так как здание всего мира совершенно и возведено премудрым Творцом, то в мире не происходит ничего, в чем бы не был виден смысл какого-нибудь максимума или минимума» («Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума или Решение изопериметрической задачи»). Поэтому в названии статьи слово «оптимального» можно и убрать.

Анализ литературы. При математическом исследовании макроэкономической задачи академик В.М. Глушков ввел новый класс динамических моделей, представляющих собой описание функционирования управляемых динамических систем интегральными уравнениями вольтерровского типа [2]. Характерной особенностью уравнений Глушкова являлось наличие функции в нижних пределах интегралов. В экономических задачах эта заданная или искомая функция может интерпретироваться как временная граница ликвидации устаревших технологий производства каких-либо продуктов. Сворачивание устаревших технологий с низкими технико-экономическими показателями (иначе – техническое перевооружение производства) при ограниченности трудовых и материальных ресурсов является важнейшим фактором управления экономической системой. Другой важной особенностью уравнений Глушкова являлось наличие в подынтегральных выражениях функции, экономический смысл которой состоял в распределении числа рабочих мест между отраслями производства групп А и Б, где А – группа производства средств производства, Б – группа производства предметов потребления. Глушковым была поставлена очень важная для практики математическая задача, состоящая в максимизации ожидаемого выхода продукции отраслей производства группы Б за некий плановый период с помощью выбора наилучшего и сбалансированного распределения рабочих мест между группами А и Б (при определенных ограничениях: заданы уравнения баланса рабочей силы и роста фондов). Глушков интуитивно предвидел свойства возможного решения поставленной задачи, но строгого доказательства их не имелось. Математическая проблема получения такого доказательства была поставлена Глушковым, являвшимся директором Киевского Института кибернетики АН УССР, как конкурсная задача перед ведущими и широко известными учеными – математиками этого института (чтобы проверить, как говорил Глушков, «who i*s* who»). Победителем этого соревнования оказался профессор В.В. Иванов (история этого события вкратце приведена в [11, с. 16]). Соответствующие результаты качественного исследования поставленной задачи были опубликованы Глушковым и Ивановым в 1977 г. [3]. Основной фундаментальный результат этого исследования заключался в следующем: для максимизации выхода продуктов потребления на достаточно большом отрезке времени планирования доказана необходимость возрастания доли числа рабочих мест в группе А по сравнению с той минимально допустимой долей, которая максимизирует выход продуктов потребления на небольшом отрезке времени планирования. В дальнейшем новый класс динамических моделей, возникших при моделировании макроэкономических задач, был существенно развит и применен для широкого класса развивающихся систем (биологических, экологических, технических и др.). Были опубликованы сотни научных работ и 4 монографии [4-6, 11] по моделированию развивающихся систем (РС) уравнениями Глушкова. В этих монографиях были исследованы вопросы существования, единственности и устойчивости решений систем интегральных уравнений Глушкова, получены результаты о существовании, единственности, структуре и асимптотике решений различных задач оптимального управления РС, предложены алгоритмы численного решения поставленных задач и изучены вопросы эффективности этих алгоритмов. Почти во всех публикациях исследовались задачи для РС с заданной начальной предысторией, причем непосредственное воздействие на систему внешних для нее факторов не рассматривалось. На основе разделения ресурсов РС на внутренние и внешние (поступающие в систему извне) были предложены в [7], а в [8] уточнены уравнения РС, которые в отличие от уравнений Глушкова используют функции более широкого класса, дополнительно учитывают непосредственное воздействие внешних факторов на РС, позволяют изучать задачи, в которых отсутствует начальная предыстория системы до момента начала ее моделирования (в этом случае РС называется возникающей), и дают возможность более эффективно (за счет перераспределения между подсистемами не только внутренних, но и внешних ресурсов) управлять этой системой. В [7] была качественно исследована оптимизационная задача распределения как внутренних, так и внешних ресурсов РС между ее подсистемами и получен аналогичный [2] результат. Для одного частного случая двухпродуктовой макроэкономической модели были получены аналитические решения оптимизационных задач распределения:

1) внутренних ресурсов (внешние ресурсы не учитывались) [3, с. 139-156];

2) как внутренних, так и внешних ресурсов [9];

3) внешних ресурсов при заданном распределении внутренних ресурсов [9,10].

Цель статьи состоит в том, чтобы на простых примерах некоторых частных случаев двухпродуктовой РС продемонстрировать идею решения поставленной оптимизационной задачи в общем случае для двухпродуктовой и трехпродуктовой РС, а также в осмысливании всех ранее полученных в теории моделирования развивающихся систем результатов решения задачи максимизации выхода продуктов потребления на заданном временном промежутке и формулировке законов оптимального развития экономических систем.

Изложение основного материала. Поставим задачу максимизации выпуска предметов потребления или услуг (полезного продукта) на плановом временном интервале при заданной динамике трудовых ресурсов с помощью распределения имеющихся внутренних и внешних ресурсов экономической системы. Решение этой оптимизационной задачи можно интерпретировать как достижение рекорда внешней функции экономической системы (ЭС) на заданном временном (плановом) периоде за счет выбора наилучшего и сбалансированного распределения внутренних (с помощью некоторой функции y) и внешних (с помощью некоторой функции x) ресурсов системы между подсистемами А и Б (в макроэкономике, например, между группой производства средств производства и группой производства предметов потребления).

Обозначим $m(t)$ и $c(t)$ скорости появления в рассматриваемой РС в момент времени t новых продуктов соответственно первого и второго родов (в экономической системе продуктами первого рода являются, например, рабочие места, а продуктами второго рода – продукты системы, идущие внешнему «заказчику»); $f(t)$ – скорость поступления в РС в момент t внешнего ресурса (f, m и c предполагаются одной размерности); $x(t)f(t)$ и $(1 - x(t))f(t)$ – скорости поступления в РС в момент t продуктов соответственно первого и второго родов; $y(\tau)m(\tau)$ и $(1 - y(\tau))m(\tau)$ – доли $m(\tau)$, используемые в дальнейшем для производства соответственно $m(t)$ (в подсистеме А) и $c(t)$ (в подсистеме Б), $0 \le \tau \le t$, $0 \le y \le 1$; $a(t)$ – максимальный момент времени, ранее которого появившиеся в РС продукты первого рода не функционируют по каналам $ym \to m$ и $(1 - y)m \to c$ соответственно в момент t (длина временного интервала $t - a(t)$ называется продолжительностью последействия или памятью системы), $a(t) \le t$; $\alpha(t, \tau)$ и $\beta(t, \tau)$ – скорости создания в момент времени t новых продуктов соответственно первого и второго родов, приходящихся на одну единицу из появившихся в момент τ продуктов первого рода соответственно в подсистеме А и в подсистеме Б, $0 \le \tau \le t$; на промежутке $(\inf\limits_{t_0 \le t \le T} a(t),\ t_0)$ заданы функции $y(\tau) \equiv y_0(\tau)$ и $m(\tau) \equiv m_0(\tau)$; t_0 – момент начала моделирования РС (РС называется возникающей, если $a(t) \ge t_0$); $0 \le t_0 \le t \le T < +\infty$; все рассматриваемые функции (кроме, быть может, $a(t)$) по определению неотрицательны.

Положим $a(t) \equiv 0$, $\alpha(t, \tau) \equiv \alpha_1(t)\alpha_2(\tau)$, $0 \le \tau \le t$, $t_0 \le t\ T < +\infty$, $t_0 \le t \le T < +\infty$ и рассмотрим на $[t_0, T]$ следующую систему уравнений относительно неизвестных функций $m(t)$, $c(t)$:

$$m(t) = \alpha_1(t)\int_0^t \alpha_2(\tau)y(\tau)m(\tau)d\tau + x(t)f(t); \qquad (1)$$

$$c(t) = \int_0^t \beta(t,\tau)(1 - y(\tau))\, m(\tau)\, d\tau + (1 - x(t))\, f(t), \qquad (2)$$

где заданы кусочно непрерывные функции $y(\tau) \equiv y_0(\tau)$, $m(\tau) \equiv m_0(\tau)$, $a(t_0) = 0 \le \tau < t_0 < T$, $0 \le s \le t$, $t \in [t_0, T]$.

Теорема 1. Пусть заданы неотрицательные непрерывные в своих областях определений функции $f(t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(s)$, $\beta(t, s)$, $y(t)$ и кусочно непрерывные функции $x(t)$, $y_0(\tau)$, $m_0(\tau)$, причем $0 \le x(t) \le 1$, $0 \le y(t) \le 1$, $0 \le y_0(\tau) \le 1$, функция $m_0(\tau)$ ограничена, $\tau \in [0, t_0)$, $0 \le s \le t$, $t_0 \le t \le T < +\infty$. Тогда система уравнений (1), (2) имеет на $t \in [t_0, T]$ единственное решение

$$m(t) = \alpha_1(t)[\int_{t_0}^t A(t,\tau)\alpha_2(\tau)y(\tau)x(\tau)f(\tau)d\tau + m^* A(t, t_0)] + x(t)f(t); \qquad (3)$$

$$c(t) = \int_{t_0}^t B(t,\tau)x(\tau)f(\tau)d\tau + B(t) + c^*(t) + (1 - x(t))f(t), \qquad (4)$$

где

$$k(t) = \alpha_1(t)\alpha_2(t)y(t), \quad A(t,\tau) = 1 + \int_\tau^t k(s)\exp(\int_s^t k(u)\,du)ds,$$

$$B(t,\tau) = \beta(t,\tau)(1 - y(\tau)) + {}$$
$$+ A(t,\tau)\,\alpha_2(\tau)y(\tau)\int_\tau^t \alpha_1(u)\beta(t,u)(1 - y(u))\,du\ ;$$

$$B(t) = \int_{t_0}^t A(\tau, t_0)\beta(t,\tau)(1 - y(\tau))m^*(\tau)d\tau,$$

$$m^* = \int_0^{t_0} \alpha_2(\tau)y_0(\tau)m_0(\tau)d\tau, \quad m^*(t) = \alpha_1(t)m^*, \quad c^*(t) = \int_0^{t_0} \beta(t,\tau)(1 - y_0(\tau))m_0(\tau)d\tau,$$

причем $m(t)$, $c(t)$ кусочно непрерывны на $[t_0, T]$.

Доказательство. Обозначив

$$k(t) = \alpha_1(t)\,\alpha_2(t)\,y(t);$$

$$n(t) = m(t) - x(t)f(t);$$

$$F(t) = k(t)(m^* + \int_{t_0}^t \alpha_2(\tau)y(\tau)x(\tau)f(\tau)d\tau);$$

$$N(t) = \int_{t_0}^t \alpha_2(\tau)y(\tau)n(\tau)d\tau,$$

и разбив область интегрирования $[0, t]$ на два подотрезка $[0, t_0]$ и $[t_0, t]$, уравнение (1) можно записать в виде

$$N'(t) - k(t)N(t) = F(t), \qquad (5)$$

где $k(t)$ и $F(t)$ известные и непрерывные на $[t_0, T]$ функции. Уравнение (5) с начальным условием $N(t_0) = 0$ легко решить на $[t_0, T]$, например, методом Эйлера, умножив обе части равенства на $\exp\left[-\int_{t_0}^t k(u)\,du\right]$ и проинтегрировав обе части полученного равенства от t_0 до t. В результате находим решение

$$N(t) = \int_{t_0}^t F(\tau)\exp[\int_\tau^t k(u)du]d\tau$$

или, возвращаясь к прежним обозначениям, для $t \in [t_0, T]$ получим равенство (3):

$$m(t) = x(t)f(t) + \alpha_1(t)[\int_{t_0}^{t} \alpha_2(\tau)y(\tau)x(\tau)f(\tau)d\tau[1+$$

$$+\int_{\tau}^{t} k(v)\exp(\int_{v}^{t} k(u)\,du)dv] + m^*(\int_{t_0}^{t} k(\tau)\exp[\int_{\tau}^{t} k(u)\,du]d\tau + 1)] = \qquad (6)$$

$$= \alpha_1(t)[\int_{t_0}^{t} A(t,\tau)\alpha_2(\tau)y(\tau)x(\tau)f(\tau)d\tau +$$

$$+m^* A(t,t_0)] + x(t)f(t).$$

Разбивая область интегрирования в уравнении (2) на подотрезки $[0, t_0]$, $[t_0, t]$ и подставляя в уравнение найденную функцию $m(t)$, получаем (поменяв порядок интегрирования в повторном интеграле) равенство (4):

$$c(t) = c^*(t) + (1 - x(t))f(t) +$$

$$+\int_{t_0}^{t} \beta(t,\tau)(1 - y(\tau))[\alpha_1(\tau)\int_{t_0}^{t} A(\tau,u)\alpha_2(u)y(u)x(u)f(u)du +$$

$$+A(\tau,t_0)\alpha(\tau)m^*]d\tau + \int_{t_0}^{t} \beta(t,\tau)(1 - y(\tau))x(\tau)f(\tau)d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t} x(\tau)f(\tau)[\beta(t,\tau)(1 - y(\tau)) +$$

$$+A(t,\tau)\alpha_2(\tau)y(\tau)\int_{\tau}^{t} \beta(t,u)(1 - y(u))\alpha_1(u)du]d\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{t} A(\tau,t_0)\beta(t,\tau)(1 - y(\tau))m^*(\tau)d\tau + c^*(t) + (1 - x(t))f(t) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} B(t,\tau)x(\tau)f(\tau)d\tau + B(t) + c^*(t) + (1 - x(t))f(t).$$

Очевидно, найденные функции $m(t)$, $c(t)$ кусочно непрерывны на $[t_0, T]$ (каждая из них является суммой кусочно непрерывной и непрерывной функций). Теорема доказана.

Так как в условиях теоремы для любой заданной кусочно непрерывной функции $x(t)$, $0 \le x(t) \le 1$ система (1), (2) однозначно разрешима, то можно поставить следующую оптимизационную задачу: в условиях теоремы из уравнений (1), (2) среди всех заданных кусочно непрерывных на $[t_0, T]$, $t_0 < T < +\infty$, функций $x(t)$, $0 \le x(t) \le 1$, найти такую функцию $x(t)$ (и соответствующие ей функции $m(t)$, $c(t)$), которая бы доставляла максимум функционалу

$$I(x) = \int_{t_0}^{T} c(t)dt.$$

Обозначим

$$\phi(T,t) = -1 + \int_{t}^{T} B(\tau,t)d\tau,$$

где $B(\tau, t)$ определено в теореме 1, $t_0 \le t \le \tau \le T$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Максимум функционала $I(x)$ достигается при $x(t) = 0$, если $\varphi(T, t) \le 0$, и при $x(t) = 1$, если $\varphi(T, t) > 0$, $t \in [t_0, T]$. В частности справедливы следующие утверждения:

1) если $y(t) \equiv 1$, $t \in [t_0, T]$, то независимо от величины $T - t0$ максимум функционала $I(x)$ достигается при $x(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, T]$;

2) если $T - t_0$ достаточно мало, то максимум функционала $I(x)$ достигается при $x(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, T]$;

3) если $T - t_0 > 1/v$

$$\inf_{t_0 \le t \le \tau < +\infty} \beta(\tau,t)(1 - y(t)) \ge v = \text{const} > 0,$$

то максимум функционала $I(x)$ достигается при $x(t) \equiv 1$ на $[t_0, T - 1/v)$, т.е. в начальной части отрезка $[t_0, T]$, и при $x(t) \equiv 0$ в конце этого отрезка, причем искомое экстремальное управление $x(t)$, $t_0 \le t \le T$, может принимать значение разве лишь   или   на каждом из подынтервалов отрезка $[t_0, T]$.

Доказательство. Имеем

$$I(x) = \int_{t_0}^{T} c(t)dt = \int_{t_0}^{T} [(1 - x(t))f(t) + c^*(t) +$$

$$+\int_{t_0}^{t} A(\tau,t_0)\beta(\tau,t)(1 - y(\tau))\,m^*(\tau)d\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{t} B(t,\tau)x(\tau)f(\tau)d\tau + B(t)]dt.$$

Воспользуемся формулой Дирихле изменения порядка интегрирования в повторном интеграле:

$$\int_{t_0}^{T} dt \int_{t_0}^{t} B(t,\tau)x(\tau)f(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{T} x(t)f(t)dt \int_{t}^{T} B(\tau,t)d\tau.$$

Следовательно,

$$I(x) = I^* + \int_{t_0}^{T}[\int_{t_0}^{t} x(\tau)f(\tau)B(t,\tau)d\tau - x(t)f(t)]dt = I^* +$$

$$+\int_{t_0}^{T} x(t)f(t)[\int_{t}^{T} B(\tau,t)d\tau - 1]dt.$$

или

$$I(x) = I^* + \int_{t_0}^{T} x(t)f(t)\phi(T,t)dt, \qquad (7)$$

где

$$I^* = \int_{t_0}^{T}[f(t) + c^*(t) + \int_{t_0}^{t}(A,\tau)t_0\ \beta(t,\tau)(1 - y(\tau))m^*(\tau)d\tau]dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T}[f(t) + c^*(t) + B(t)]dt;$$

$$\phi(T,t) = \int_{t}^{T} B(\tau,t)d\tau - 1.$$

Если $y(t) \equiv 1$, $t \in [t_0, T]$, то $B(\tau, t) \equiv 0$, $\varphi(T, t) \equiv -1$, $t_0 \le t \le \tau \le T$,

$$I(x) = I^* - \int_{t_0}^{T} x(t)f(t)dt.$$

Следовательно, независимо от величины $T - t_0$ максимум функционала $I(x)$ достигается при $x(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, T]$. Так как, $\varphi(T, t) = -1 < 0$ и непрерывная функция $\varphi(T, t)$ сохраняет знак в некоторой окрестности точки $t = T$, то можно считать доказанными следующие утверждения:

а) $\varphi(T, t) < 0$ при достаточно малых $T - t_0$;

б) если $T - t_0 > 1/v$ где

$$0 < \text{const} = v \le \inf_{t_0 \le t \le \tau < +\infty} \beta(\tau,t)(1 - y(t)),$$

то $\varphi(T, t) \ge v(T - t) - 1 > 0$ для $t \in [t_0, T - 1/v)$ и существует такое число θ, $T - 1/v < \theta < T$ что $\varphi(T, t) < 0$ для $t \in (\theta, T]$. Из формулы (7) вытекает, что в условиях теоремы максимум функционала $I(x)$ достигается при $x(t) = 0$, если $\varphi(T, t) \le 0$, и при $x(t) = 1$, если $\varphi(T, t) > 0$, $t \in [t_0, T]$. Откуда непосредственно и следует справедливость теоремы.

Для частных случаев рассмотренного класса моделей РС доказаны следующие теорема 3 [10] и теорема 4 [11].

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1, $\alpha_1(t) \equiv 1$, $\alpha_2(s) \equiv \alpha > 0$, $\beta(t, s) \equiv \beta > 0$, $y(t) \equiv y \in [0, 1]$ где α, β и y – const, $s \in [0, t]$, $t \in [t_0, T]$. Если $y = 1$, то для любых положительных значений $T - t_0$ максимум функционала $I(x)$ достигается при $x(t) \equiv 0$ $t \in [t_0, T]$. Если $y = 0$, то максимум функционала $I(x)$ достигается для $T - t_0 \le 1/\beta$ при $x(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, T]$, а для $T - t_0 > 1/\beta$ при $x(t) \equiv 0$ на $[t_0, T - 1/\beta)$ и $x(t) \equiv 1$ на $[T - 1/\beta, T]$. Если же $0 < y < 1$, то максимум функционала $I(x)$ достигается для

$$T - t_0 \le \frac{1}{\alpha y}\ln\left(1 + \frac{\alpha y}{\beta(1-y)}\right)$$

при $x(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, T]$, а для

$$T - t_0 > \frac{1}{\alpha y}\ln\left(1 + \frac{\alpha y}{\beta(1-y)}\right)$$

при $x(t) \equiv 1$ на $\left[t_0, T - \frac{1}{\alpha y}\ln\left(1 + \frac{\alpha y}{\beta(1-y)}\right)\right)$ и $x(t) \equiv 0$ на $\left[T - \frac{1}{\alpha y}\ln\left(1 + \frac{\alpha y}{\beta(1-y)}\right), T\right]$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 1, $\alpha_1(t) \equiv 1$, $\alpha_2(s) \equiv \alpha > 0$, $\beta(t, s) \equiv \beta > 0$, $y(t) \equiv y \in [0, 1]$, $f(t) = f > 0$, $x(t) = x \in [0, 1]$, где α, β, x, y и f – const, $s \in [0, t]$, $t \in [t_0, T]$. Если $y = 1$, то для любых положительных значений $T - t_0$ максимум функции $I(x)$ достигается при $x = 0$. Если $y = 0$, то максимум функции $I(x)$ достигается для $T \in [t_0, t_0 + 2/\beta]$ при $x = 0$, а для $T > t_0 + 2/\beta$ при $x = 1$. Если же $0 < y < 1$, то максимум функции $I(x)$ достигается для $T \in [t_0, T^*]$ при $x = 0$, а для $T > T^*$ при $x = 1$, где $T = T^*$ – положительный корень уравнения

$$e^{\alpha y(T - t_0)} - \left(1 + \frac{\alpha y}{\beta(1-y)}\right)\alpha y(T - t_0) - 1 = 0.$$

Рассмотрим теперь трехпродуктовую РС, которая кроме уже двух указанных подсистем А и Б содержит подсистему В – науку, в которой производятся новые технологии производства продуктов первого и второго рода [6, p. 234]:

$$\alpha'(t) = \int_{a(t)}^{t} \alpha(t,s)y_1(s)m(s)ds;$$

$$\alpha(t,s) = \alpha(s)\exp(-d(t-s)); \tag{8}$$

$$\beta(t) = \int_{a(t)}^{t} \alpha(t,s)y_2(s)m(s)ds;$$

$$\beta(t,s) = \beta(s)\exp(-d(t-s)), \tag{9}$$

где $\alpha(t, s)$ есть новая технология для воспроизводства РМ со скоростью $m(t)$ и для создания новой технологии $\beta(t, s)$ производства продуктов второго рода со скоростью $c(t)$, $0 \le y_1(s), y_2(s) \le 1$; $a(t)$ – временная граница ликвидации устаревших технологий производства продуктов, т.е. продукты первого рода, появившиеся в системе ранее момента времени $a(t)$, в производстве продуктов в момент t не используются, $a(t_0) \le a(t) \le t$ заменим в уравнениях (1) и (2) $y(\tau)$ на $y_3(\tau)$, $0 \le y_3(\tau) \le 1$ и $1 - y(\tau)$ на $1 - y_1(\tau) - y_2(\tau) - y_3(\tau)$ соответственно, $y_1(\tau) + y_2(\tau) + y_3(\tau) = 1$, величина $d = \text{const} > 0$ задана, $a(t) \le \tau \le t$; получившиеся уравнения (1), (2) и уравнения (8), (9) описывают функционирование трехпродуктовой РС, для которой рассмотрим задачу отыскания функций $x(t)$, $Y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$ (при этом необходимо решить нелинейную задачу нахождения соответствующих им функций $m(t)$, $a(t)$ и $c(t)$), доставляющих максимум функционалу

$$I(x, Y) = \int_{t_0}^{T} c(t)dt.$$

Получены следующие результаты [3-10], которые в виду их важности можно назвать законами оптимального развития систем (в частности, экономических) на заданном временном промежутке планирования $[t_0, T]$.

Существуют три числа T_1, T_2, T_3, $t_0 < T_1 < T_2 < T_3$, такие, что:

1) для достаточно малой величины времени планирования $T - t_0 \le T_1$ искомый оптимум достигается при максимально возможном (в силу ограничений задачи) использовании в подсистеме Б внутренних и внешних ресурсов для выполнения основной функции системы;

2) для достаточно большой величины времени планирования $T_1 < T - t_0 \le T_2$ искомый оптимум достигается при существенных долях внутренних и внешних ресурсов, используемых в подсистеме А на внутренние потребности системы на большей начальной части отрезка планирования и максимально возможном использовании в подсистеме Б внутренних и внешних ресурсов для выполнения основной функции системы в конце этого временного отрезка;

3) для достаточно большой величины времени планирования $T - t_0 \le T3$ искомый оптимум достигается при существенных долях внутренних и внешних ресурсов, используемых в подсистеме В (называемой «наукой») на большей начальной части отрезка планирования $[t_0, \theta_1]$, при существенных долях всех ресурсов, поступающих вначале на большей части следующего временного отрезка $[\theta_1, \theta_2]$ в подсистему А и максимально возможном использовании в подсистеме Б внутренних и внешних ресурсов для выполнения основной функции системы в конце этого временного отрезка $[\theta, T]$, $t_0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta < T$.

Замечание. Утверждения 1) и 2) доказаны в результате качественного исследования оптимизационной задачи для двухпродуктовой РС в [7]; утверждение 3) доказано в [6] для задачи наилучшего распределения только внутренних ресурсов трехпродуктовой РС, т.е. при $x(t) \equiv f(t) \equiv 0$.

Выводы. Сформулированы в виде законов развития экономических систем результаты решения (Глушковым В.М., Ивановым В.В., Яценко Ю.П., Гирлиным С.К. и Билюнас А.В.) задачи максимизации на заданном временном отрезке планирования выхода продуктов второго рода (обеспечивающих основную функцию системы) посредством наилучшего распределения всех имеющихся ресурсов (внутренних и внешних) между подсистемами А (подсистемой самосовершенствования системы), Б (подсистемой выполнения основной функции системы) и В («наукой» – подсистемой производства новых технологий производства продуктов первого и второго рода) трехпродуктовой экономической системы. Доказанные свойства развития системы можно образно назвать «законом разумного эгоизма системы»: для того, чтобы система успешно функционировала в течение длительного промежутка времени, системе необходимо значительную часть всех ресурсов (а иногда – и все ресурсы) направлять прежде всего на свои внутренние потребности, на свое самосовершенствование, и лишь в конце рассматриваемого промежутка времени – на выполнение своей основной функции.

Список литературы

1. Клайн М. Математика. Утрата определенности: пер. с англ. / под ред., с предисл. и примеч. И.М. Яглома. – М.: Мир, 1984. – 434 с.
2. Глушков В.М. Об одном классе динамических макроэкономических моделей // Управляющие системы и машины. – 1977. – № 2. – С. 3-6.
3. Глушков В.М. Моделирование оптимизации распределения рабочих мест между отраслями производства А и Б / В.М. Глушков, В.В. Иванов // Кибернетика. – 1977. – № 6. – С. 117-131.
4. Глушков В.М. Моделирование развивающихся систем / В.М. Глушков, В.В. Иванов, В.М. Яненко. – М.: Наука, 1983. – 352 с.
5. Яценко Ю.П. Интегральные модели систем с управляемой памятью. – К.: Наук. думка, 1991. – 220 с.
6. Ivanov V.V. Model development and optimization. – Dordrecht / Boston. – London: Kluwer Academic Publishers, 1999. – 249 p.

7. Ivanov V.V. Mathematical Models of the Cell and Cell Associated Objects / V.V. Ivanov, N.V. Ivanova. – Amsterdam: Elsevier, 2006.– 333 p.
8. Гирлин С.К. Моделирование взаимодействия развивающихся систем / С.К. Гирлин, В.В. Иванов // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – № 1. – С. 58-60.
9. Гирлин С.К. Моделирование возникающих развивающихся систем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1987. – № 10. – С. 65-67.
10. Гирлин С.К. Моделирование оптимизации распределения внутренних и внешних ресурсов в экономической системе / С.К. Гирлин, А.В. Билюнас // Сталий розвиток підприємств сфери послуг: Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Ялта, 23-24 жовтня 2009 р.). – Ялта: РВНЗ КГУ, 2009. – С. 287-290.
11. Гирлин С.К. Аналитическое решение одной задачи оптимального управления открытой развивающейся системой // С.К. Гирлин, А.В. Билюнас // Методологічні та методичні основи активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів у процесі вивчення математичних дисциплін: Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції (Ялта, 23-24 листопада 2009 р.). – Зб. статей. – Ялта: РВВ КГУ, 2009. – Вип. 3. – С. 191-197.
12. Viktor V. Ivanov and Natalya V. Ivanova. Mathematical Models of the Cell and Cell Associated Objects. – Amsterdam: Elsevier, 2006.– 333 p.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНОГАБАРИТНОЙ ГАЗОСТАТИЧЕСКОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ОПОРЫ С ДИСКРЕТНЫМ ПОДДУВОМ

Долгих Т.Ф., Снопов А.И.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, e-mail: DTF_STUD@mail.ru

Рассмотрим кольцевую газостатическую опору с дискретным поддувом. Внешний радиус опоры равен R_H, а внутренний – R_B. Полагаем, что зазор между смазываемыми поверхностями постоянен и равен h. Газ в смазочный слой опоры попадает под давлением p_s через N произвольно расположенных на одной из смазываемых поверхностей питателей типа «простая диафрагма». При этом диаметры питателей могут быть разные: $d0_j$, $j = 1, 2, ..., N$ – диаметры подводящих каналов, а d_j, $j = 1, 2, ..., N$ – диаметры «карманов». Поток газа в смазочном слое принимается неодномерным, установившимся, ламинарным, изотермическим, а в питателях – одномерным, установившимся, адиабатическим, подчиняющимся законам динамики идеального газа.

Любому потоку вязкого газа между неподвижными параллельными плоскостями соответствует определенная аналитическая функция $w(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ – комплексный потенциал:

$$w(z) = P^2(x, y) + i\psi(x, y). \qquad (1)$$

Комплексный потенциал на границах опоры удовлетворяет условию $P = p_a$, а на границах питателей Γ_j – условиям:

$$\frac{1}{\pi d_j}\oint_{\Gamma_j} \mathrm{Re}\, w(z)\, d\Gamma_j = p_{dj}^2, \quad j = 1, 2, ..., N. \qquad (2)$$

Из представления комплексного потенциала (1) получаем формулу для определения поля давлений в смазочном слое:

$$P = \sqrt{\mathrm{Re}\, w(z)}. \qquad (3)$$

Расчет кольцевых газостатических опор порой очень затруднителен. В таких случаях для нахождения комплексного потенциала удобно воспользоваться методом конформных отображений и перейти к расчету полосовой опоры. Для этого свяжем с плоскостью опоры систему координат r, φ и введем новую комплексную координату $\varsigma = re^{i\varphi}$. Конформное отображение дает функция $z = -i\ln(\varsigma/R_H)$. Тогда кольцевой опоре в фиктивном потоке z соответствует безграничная полоса шириной $L = \ln(R_H/R_B)$, на которой расположены N дорожек точечных источников. Диаметры питателей в полосовой опоре равны $d0'_j = d0_j/r_j$ для подводящих каналов и $d'_j = d_j/r_j$ для «карманов». Базовые координаты питателей будут $\varsigma_j = -i\ln\left((r_j/R_H)\cdot e^{i\varphi_j}\right)$. B – шаг, с которым расположены питатели в каждой дорожке. Полагаем параметры газа и толщину смазочного слоя в фиктивном потоке такими же, как и для реального газа. Следовательно, давления в фиктивном потоке в соответствующих точках будут такими, как и в реальном.

Комплексный потенциал фиктивного потока в смазочном слое полосовой опоры легко строится методом источников и стоков. В результате получаем:

$$w(z) = \frac{12\mu a_s^2}{\kappa\pi h^3}\sum_{k=1}^{N} Q_k f_k(z) + p_a^2. \qquad (4)$$

Функции $f(z)$, определяющие комплексные потенциалы потоков в полосе z, которые породили дорожки точечных источников, полагаем известными. μ – динамический коэффициент вязкости, κ – показатель адиабаты Пуассона, p_a – давление окружающей среды, a_s – скорость звука в газе.

Условие (2) и равенство расходов газа через смазочный слой и через питатели $Q_j = M_j$, дают систему нелинейных уравнений для определения давлений p_{dj} на кромках питателей и расхода газа Q_j. Но нужно помнить, что мы рассматриваем питатели типа «простая диафрагма», поэтому целесообразно применять схему *«двойного дросселирования»*. Это означает, что на входе в «карман» полагаем площадь минимального сечения $\hat{A}_{\min}^{(j)} = \pi d0_j^2/4$ и эмпирический поправочный коэффициент $\hat{\alpha} = 0{,}9$, а на выходе из «кармана» – $A_{\min}^{(j)} = \pi d_j h$, $\alpha = 0{,}8$. Тогда для определения давлений на кромках питателей составляем две системы нелинейных уравнений:

$$x0_j = \sum_{i=1}^{N}\frac{12\hat{\alpha}\mu a_s\hat{A}_{\min}^{(i)}E_{ij}}{\pi h^3 p_s}\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} q(x0_i) + p_1^2, \quad j = 1, 2, ..., N; \qquad (5.1)$$

$$x_j = \sum_{i=1}^{N}\frac{12\alpha\mu a_s A_{\min}^{(i)}E_{ij}}{\pi h^3 \hat{p}_{dj}}\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} q(x_i) + p_1^2, \quad j = 1, 2, ..., N. \qquad (5.2)$$

Здесь

$$x0_j = \left(\hat{p}_{dj}/p_s\right)^2, \quad x_j = \left(p_{dj}/\hat{p}_{dj}\right)^2,$$

$$E_{ij} = \mathrm{Re}\left[\oint_{\Gamma_i} f_j(\varsigma)\, d\Gamma_i\right], \quad i, j = 1, 2, ..., N,$$

$q(x)$ – газодинамическая функция, p_1 – отношение давлений на входе в питатель и на выходе.

В этом случае количество газа, поступающего в карман в единицу времени через подводящий канал с диаметром $d0_j < d_j$, вычисляется по формуле:

$$\hat{M}_j = \hat{\alpha}\frac{\kappa p_s\hat{A}_{\min}^{(j)}}{a_s}\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} q\left(\frac{\hat{p}_{dj}^2}{p_s^2}\right). \qquad (6.1)$$

А количество газа, вытекающего в единицу времени из «кармана» через кольцевую диафрагму под действием давления $\hat{p}_{dj}$ находим из равенства: