Физико-математические науки

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОЦЕНКЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ОБЛАСТИ СО СКОСАМИ СТЕН

Абрамов В.В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, e-mail: abram5189@yandex.ru

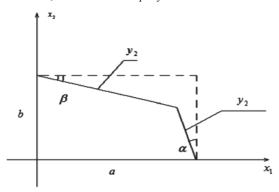
Рассмотрим задачу о расчете собственных частот колебания прямоугольной области со скосами стен. Данная проблема актуальна в акустике помещений при улучшении качества звучания. Для решения задачи используем метод граничных интегральных уравнений (ГИУ).

Остановимся на геометрии этой области. Пусть две смежные стороны без скоса имеют размеры a и b. А две другие зададим, как уравнение прямой через угловой коэффициент и точку:

$$x = a - k^* y_1; \tag{1}$$

$$y_2 = k_2 x + b, \tag{2}$$

где $k^* = \text{сtg}\alpha$, $k_2 = \text{tg}\beta$. Углы α и β отсчитываются от соответствующих сторон прямоугольника с размерами a на b, как показана на рисунке.



Геометрия задаваемой области

Заметим, что такая параметризация скошенных сторон четырехугольника позволит избежать неприятностей при переходе к прямоугольнику.

Будем рассматривать только выпуклые четырехугольники. Для этого наложим ограничения на углы скоса сторон. Такими условиями очевидно являются:

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \operatorname{arcctg} \frac{a}{b}; \tag{3}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \beta < \arctan \frac{a}{b}; \tag{4}$$

$$\frac{b + k_2 a}{1 + k^* k_2} > 0; (5)$$

$$\frac{a - k^* b}{1 + k^* k_2} > 0.$$
(6)

Отметим, условия (5) и (6) есть ни что иное, как условия нахождения точки пересечения двух скошенных сторон в правом верхнем квадранте.

Вернемся к решению самой задачи. Мы рассматриваем поле давлений внутри четырехугольной области с двумя смежными скошенными сторонами. Известно, что в данной области поле давлений удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta p + k^2 p = 0, (7)$$

где $k = \frac{\omega}{c}$ — волновое число, ω — круговая частота, c — скорость звука в данной среде.

Рассмотрим граничные условия. Оно имеет вид:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{l} = 0,$$
 (8)

где l — контур (в нашем случаи четырехугольник). Заметим, что полное давление представимо в виде:

$$p = p^{inc} + p^{sc}, (9)$$

где p^{inc} — поле давлений порожденное точечным источником звука; p^{sc} — отраженное поле давлений.

Рассмотрим задачу об нахождении отраженного поля на контуре *l*. Для этого, перепишем условия (7) и (8) с учетом (9). Тогда получим:

$$\begin{cases}
\Delta p^{sc} + k^2 p^{sc} = 0; \\
\frac{\partial p^{sc}}{\partial n}\Big|_{t} = -\frac{\partial p^{inc}}{\partial n}\Big|_{t}
\end{cases}$$
(10)

Решать систему (10) будем с помощью метода граничных интегральных уравнений (МГИУ). Зафиксируем точку $x=(x_1,x_2)$ внутри контура l, а точка $y=(y_1,y_2)$ – переменная. Введем расстояние между точками x и y, как r=|y-x|.

Заметим, функция Грина для данной задачи имеет вил

$$\Phi(r) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr), \tag{11}$$

где $H_0^{(1)}(kr) = J_0(kr) + i\dot{Y}_0(kr)$ — функция Ханкеля, а $J_0(kr)$, $Y_0(kr)$ — функции Бесселя первого и второго рода соответственно, причем она сама по определению удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0 \tag{12}$$

Возьмем первое уравнение (10) и умножим его на функцию Грина, затем уравнение (12) умножим на отраженное поле давлений, вычитаем одно из другого и интегрируем по области заключенной в нашем четырехугольнике. Далее воспользовавшись формулой Грина получим:

$$p^{sc}(x) = \oint_{l} \left[p^{sc}(y) \frac{\partial \Phi}{\partial n}(y, x) - \Phi(y, x) \frac{\partial p^{sc}}{\partial n}(y) \right] dl_{y}, \ x \notin l.$$
 (13)

Устремив $x \to \tilde{x} \in l$ и воспользовавшись свойствами потенциала двойного слоя, получим

$$\frac{p^{sc}(\tilde{x})}{2} - \oint_{l} \left[p^{sc}(y) \frac{\partial \Phi}{\partial n}(y, \tilde{x}) \right] dl_{y} = \oint_{l} \left[\Phi(y, x) \frac{\partial p^{inc}}{\partial n}(y) \right] dl_{y}, \ \tilde{x} \in l.$$
 (14)

В формуле (14) было использовано второе уравнение из (10).

Стоит отметить, что p^{inc} удовлетворяет уравнению Гельмгольца (7), а следовательно имеет вид:

$$p^{inc}(y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k | y - x |). \qquad (15) \qquad \frac{\partial p^{inc}}{\partial n} = -\frac{ik}{4} H_1^{(1)}(k | y - x |) \frac{\partial r}{\partial n}, \qquad (16)$$

где
$$\frac{\partial r}{\partial n}(y,x) = \frac{(y_1 - x_1)n_1 + (y_2 - x_2)n_2}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}}$$
(17)

и $\overline{n} = \{n_1, n_2\}$ – внешняя нормаль. Разберемся с вопросом о выборе внешней нормали на каждой из сторон. Очевидно, что для стороны длинной a внешняя нормаль – $\overline{n} = \{0; -1\}$, для стороны длинной b внешняя нормаль – $\overline{n} = \{-1; 0\}$, для стороны $y_{_1}$ внешняя нормаль — $\overline{n} = \{1; k^*\}$; для стороны $y_{_2}$

внешняя нормаль — $\overline{n} = \{-k_2; 1\}$. Решим интегральное уравнение (14) методом коллокаций. Организуем две последовательности:

 $\left\{x_{i}\right\} = \left\{x_{i}^{1}; x_{i}^{2}\right\}$ – внешние узлы и $\left\{y_{j}\right\} = \left\{y_{j}^{1}; y_{j}^{2}\right\}$ – внутренние узлы, где i = 1, ..., N и j = 1, ..., N. Заметим, что методом коллокаций называется такой численный метод дискретизации интегрального (14) при котором множество внутренних узлов совпадает с множеством внешних узлов, то есть $\{x_i\}_{i=1}^N = \{y_i\}_{j=1}^N$. Из вида уравнения (14) отраженное поле следует искать

$$p^{sc}(x) = p_{Re}^{sc}(y) + ip_{Im}^{sc}(y).$$
 (18)

Тогда дискретизируя уравнение (14) и разделяя

$$\frac{1}{2} p_{\text{Re}}^{sc}(x_{i}) + \frac{k}{4} \sum_{j=1}^{N} p_{\text{Re}}^{sc}(y_{j}) Y_{1}(kr_{ij}) \frac{\partial r}{\partial n}(y_{j}, x_{i}) \Delta l + \frac{k}{4} \sum_{j=1}^{N} p_{\text{Im}}^{sc}(y_{j}) J_{1}(kr_{ij}) \frac{\partial r}{\partial n}(y_{j}, x_{i}) \Delta l =
= \frac{k}{16} \sum_{j=1}^{N} \left[J_{1}(kr_{0j}) J_{0}(kr_{ij}) - Y_{1}(kr_{0j}) Y_{0}(kr_{ij}) \right] \frac{\partial r}{\partial n}(y_{j}, x) \Delta l .$$
(19)

$$\frac{1}{2} p_{\text{lm}}^{sc}(x_{i}) + \frac{k}{4} \sum_{j=1}^{N} p_{\text{lm}}^{sc}(y_{j}) Y_{1}(kr_{ij}) \frac{\partial r}{\partial n}(y_{j}, x_{i}) \Delta l - \frac{k}{4} \sum_{j=1}^{N} p_{\text{Re}}^{sc}(y_{j}) J_{\Gamma}(kr_{ij}) \frac{\partial r}{\partial n}(y_{j}, x_{i}) \Delta l =
= \frac{k}{16} \sum_{j=1}^{N} \left[J_{1}(kr_{0j}) Y_{0}(kr_{ij}) + Y_{1}(kr_{0j}) J_{0}(kr_{ij}) \right] \frac{\partial r}{\partial n}(y_{j}, x) \Delta l .$$
(20)

где $r_{ij} = |y_j - x_i|$, $r_{0j} = |y_j - x|$ и Δl – величина шага.

Введем обозначения:

$$\begin{split} K_{ij}^{\text{Re}} &= \frac{k}{4} \, p_{\text{Re}}^{\text{sc}}(y_j) Y_1(k r_{ij}) \frac{\partial r}{\partial n} \left(y_j, x_i \right) \! \Delta l \,; \\ K_{ij}^{\text{Re}} &= \frac{k}{4} \, p_{\text{Re}}^{\text{sc}}(y_j) Y_1(k r_{ij}) \frac{\partial r}{\partial n}(y_j, x_i) \Delta l \,; \\ f_i^{\text{Re}} &= \frac{k}{16} \sum_{j=1}^N \left[J_1(k r_{0j}) J_0(k r_{ij}) - Y_1(k r_{0j}) Y_0(k r_{ij}) \right] \frac{\partial r}{\partial n}(y_j, x) \Delta l \,; \end{split}$$

Таким образом, мы получили систему вида Ap = f, где $A \in M_{2N \times 2N}$; $p, f \in R^{2N}$ и имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \dots & K_{ji}^{\text{Re}} & & & \\ & \dots & & & K_{ji}^{\text{Im}} & & \\ & K_{ij}^{\text{Re}} & \dots & \frac{1}{2} & & & \\ & & & \frac{1}{2} & \dots & K_{ij}^{\text{Re}} \\ & & & \frac{1}{2} & \dots & K_{ij}^{\text{Re}} \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} p_{\text{Re}}^{sc}(y) & & & \\ p_{\text{Re}}^{sc}(y_{N}) & & & \\ p_{\text{Im}}^{sc}(y) & & & \\ p_{\text{Im}}^{sc}(y) & & & \\ p_{\text{Im}}^{sc}(y) & & & \\ p_{\text{Im}}^{sc}(y_{N}) & & & \\ p_{\text{Im}}^{\text{Im}}(y) & & & \\ p_{\text{Im}}^{\text{Im}}(y_{N}) & & & \\ \end{pmatrix}; f = \begin{pmatrix} f_{1}^{\text{Re}} & & & \\ f_{1}^{\text{Re}} & & & \\ f_{1}^{\text{Im}} & & & \\ f_{N}^{\text{Im}} & & & \\ f_{N}^{\text{Im}} & & & \\ f_{N}^{\text{Im}} & & & \\ \end{pmatrix}.$$

Заметим, что диагональные элементы матрицы $A \in M_{_{2N \times 2N}}$ должны иметь вид $a_{ii} = \frac{1}{2} - K_{ii}^{\mathrm{Re}}$, но так как $K_{ii}^{\text{Re}} \ll \frac{1}{2}$, то ими можно пренебречь.

Так как на диагонали матрицы $A \in M_{2N \times 2N}$ стоят элементы большие, чем остальные элементы матрицы, то эта матрица хорошо обусловлена. Для решения данной системы линейных алгебраических уравнений можно пользоваться QL – алгоритмами.

Предложенный в данной работе метод был апробирован на конкретных тестовых геометриях, для которых удается эффективно построить распределение первой сотни собственных частот колебания в реальном масштабе времени.

1. Исакович М.А. Общая акустика. – М.: Наука, 1973. 2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир. 1987. 3. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов науках. – М.: Мир, 1984.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРУЗА ПРИ НАЛИЧИИ НЕУДЕРЖИВАЮЩЕЙ СВЯЗИ

Бертяев В В

Тульский государственный университет, Тула, e-mail: tm@tsu.tula.ru

Рассмотрим движение груза M массой m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити длиной – l_0 (рис. 1,а). Пренебрежем размерами груза и заменим его материальной точкой. Нить для материальной точки является связью, определяемой неравенством

$$x^2 + y^2 = l_0^2 \quad \text{или} \quad r \le l_0, \tag{1}$$

где r – длина радиус вектора, задающего положение точки на полярной оси ОМ.

Рассмотрим материальную точку в произвольный момент времени, предполагая наличие связи (1) (рис. 1,б), действие которой, при составлении уравне-