Заданы: траектория точки A

$$y_A = -\frac{180}{\pi}\ln\cos\left(\frac{\pi x_A}{180}\right),\text{см};$$

закон изменения угла $\xi = \ln, s_A$ рад; координаты точки A: $u_A = 4$ см; $v_A = 6$ см ($u_B = 0$ см; $v_B = -36$ см).

Построены траектории точек A и В для положения подвижной плоскости, соответствующего положению точки A (30; 8,24) построены круг Лагира. Круг Брессе построен для двух вариантов:

1. При $v_A = 5$ см/с; $w_A^\tau = 2$ см/с ^{2}.

2. При $v_A = 5$ см/с; $w_A^\tau = 0{,}25$ см/с ^{2}.

Показано, что круг Брессе по отношению к нормали n-n располагается с той или с другой ее стороны в зависимости от знака B ($B > 0$ или $B < 0$).

Рассмотренные понятия мгновенного центра производных перемещений и характерных областей подвижной плоскости наглядно отражают геометрические признаки плоского движения твердого тела.

МГНОВЕННЫЙ РАДИУС. КРУГ ЛАГИРА

Соколов Г.М., Петрушина К.Г., Осокина Е.Ф.

Марийский государственный технический университет, Йошкар-Ола, e-mail: KseniyaPetrushinaG@yandex.ru

Определим семейство точек, траектории которых в направлении оси v (системы $vO\mu$), составляющей угол $\psi + \pi/2$ с осью x, имеют экстремумы, то есть

$$v'_\mu = \frac{v'_{SA}}{\mu'_{SA}} = 0.$$

С учетом

$$\mu'_{SA} = x'_{SA}\cos\psi + y'_{SA}\sin\psi;$$

$$v'_{SA} = -x'_{SA}\sin\psi + y'_{SA}\cos\psi;$$

$$x'_{SA} = x'_{ASA} - (u - u_A)\sin\varsigma\varsigma'_{SA} - (v - v_A)\cos\varsigma\varsigma'_{SA}$$

$$y'_{SA} = y'_{ASA} - (u - u_A)\cos\varsigma\varsigma'_{SA} - (v - v_A)\sin\varsigma\varsigma'_{SA};$$

имеем

$$-\left[x'_{ASA} - (y - y_A)\varsigma'_{SA}\right]\sin\psi + \left[y'_{ASA} + (x - x_A)\varsigma'_{SA}\right]\cos\psi.$$

Так как

$$x'_{SA} = -(y - y_P)\varsigma'_{SA};\quad y'_{SA} = (x - x_P)\varsigma'_{SA};$$

то $(y - y_P) = -\mathrm{ctg}\psi(x - x_P)$.

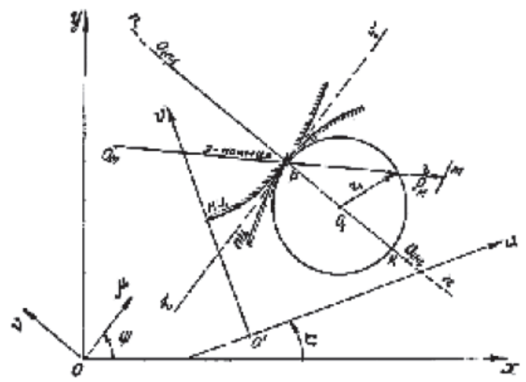
В подвижной системе координат на основании (рисунок)

$$x = x_A + (u - u_A)\cos\varsigma - (v - v_A)\sin\varsigma;$$

$$y = y_A + (u - u_A)\sin\varsigma + (v - v_A)\cos\varsigma$$

получим

$$(v - v_P) = -\mathrm{ctg}(\psi - \varsigma)(u - u_P).$$



Из этих соотношений следует, что геометрическим местом точек, траектории которых имеют экстремумы, является прямая, соединяющая их с точкой P.

В общем случае (при $ds_A \neq 0$, $d\varsigma \neq 0$) прямая, соединяющая произвольную точку М подвижной плоскости с мгновенным центром перемещений точкой Р², является геометрическим местом точек, траектории которых в направлении этой прямой на неподвижной плоскости имеют экстремумы. Прямую РМ назовем Э-прямой (прямой экстремумов), а отрезок РМ называют мгновенным радиусом.

Его длина

$$r = \sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2} = \sqrt{(u - u_P)^2 + (v - v_P)^2}.$$

Определим семейство точек, траектории которых имеют точки перегиба, то есть

$$v''_\mu = \frac{\mu'_{SA}\cdot v''_{SA} - \mu''_{SA}\cdot v'_{SA}}{\mu'_{SA}} = 0,$$

откуда следует

$$\mu'_{SA}\cdot v''_{SA} - \mu''_{SA}v'_{SA} = 0.$$

Используя соотношения

$$\mu'_{SA} = x'_{SA}\cos\psi + y'_{SA}\sin\psi;$$

$$v'_{SA} = -x'_{SA}\sin\psi + y'_{SA}\cos\psi;$$

$$\mu''_{SA} = x''_{SA}\cos\psi + y''_{SA}\sin\psi;$$

$$v''_{SA} = -x''_{SA}\sin\psi + y''_{SA}\cos\psi.$$

И с учетом

$$x'_{SA} = -(y - y_P)\varsigma'_{SA};\quad y'_{SA} = (x - x_P)\varsigma'_{SA};$$

$$x''_{SA} = -\left[(x - x_P)\varsigma'_{SA} - y'_{PSA}\right]\varsigma'_{SA} - (y - y_P)\varsigma''_{SA};$$

$$y''_{SA} = -\left[(y - y_P)\varsigma'_{SA} + x'_{PSA}\right]\varsigma'_{SA} + (x - x_P)\varsigma''_{SA}$$

получаем

$$(x - x_P)(y'_{SA} - y'_{PSA}) - (y - y_P)(x'_{SA} - x'_{PSA}) = 0,$$

где на основании

$$x_P = x_A - \varsigma'^{-1}_{yA},\quad y_P = y_A - \varsigma'^{-1}_{xA}$$

имеем

$$x'_{PSA} = x'_{ASA} + \varsigma'^{-2}_{xA}\varsigma''_{yA}y'_{ASA},$$

$$y'_{PSA} = y'_{ASA} - \varsigma'^{-2}_{xA}\varsigma''_{yA}x'_{ASA}.$$

Отметим, что

$$x'^2_{PSA} + y'^2_{PSA} = s'^2_{PSA},$$

где s_n – длина дуги центроид.

Находим геометрическое место точек перегиба

$$\left[x - \left(x_P + 0{,}5y'_{p\varsigma}\right)\varsigma'_{SA}\right]^2 + \left[y - \left(y_P - 0{,}5x'_{p\varsigma}\right)\varsigma'_{SA}\right]^2 = \left(0{,}5s'_{p\varsigma}\right)^2,$$

где

$$x'_{p\varsigma} = x_{PSA}\varsigma'^{-1}_{yA},\quad y'_{p\varsigma} = y'_{PSA}\varsigma'^{-1}_{yA};\quad s'_{p\varsigma} = s_{PSA}\varsigma'^{-1}_{yA}.$$

Получено уравнение окружности радиуса $r_1 = 0{,}5s'_{p\varsigma}$, касающейся общей касательной τ-τ к центроидам в точке P, центр которой O_1 с координатами:

$$x_{O_1} = x_P + 0{,}5y'_{p\varsigma}\quad y_{O_1} = y_P + 0{,}5x'_{p\varsigma}$$

лежит на общей нормали к центроидам n-n. Точка

$$K\left[\left(x_P + y'_{p\varsigma}\right),\ \left(y_P - x'_{p\varsigma}\right)\right]$$

этой окружности называется полюсом поворота, в ней пересекаются векторы перемещений всех её точек.

Уравнение окружности в подвижной системе координат $uO'v$ получим на основании выражения

$$\left\{u - \left[u_P - 0{,}5\left(x'_{p\varsigma}\sin\varsigma - y'_{p\varsigma}\cos\varsigma\right)\right]\right\}^2 + \left\{v_P - \left[v + 0{,}5\left(x'_{p\varsigma}\cos\varsigma + y'_{p\varsigma}\sin\varsigma\right)\right]\right\}^2 = \left(0{,}5s'_{p\varsigma}\right)^2.$$

Её центр расположен в точке O_1 с координатами

$$u_{O_1} = u_P - 0{,}5\left(x'_{p\varsigma}\sin\varsigma - y'_{p\varsigma}\cos\varsigma\right);$$

$$v_{O_1} = v_P + 0{,}5\left(x'_{p\varsigma}\cos\varsigma + y'_{p\varsigma}\sin\varsigma\right).$$

Эта окружность носит название «поворотная окружность», или «окружность перегибов», а круг, ею ограниченный, – «поворотный круг», или «круг Лагира».

При $s'_{p\varsigma} = 0$ круг Лагира стягивается в точку P (происходит вращение вокруг постоянного центра P), а при $s'_{p\varsigma} = \infty$ (поступательное движение) радиус круга равен бесконечности (круг обращается в прямую τ-τ).

Геометрическое место центров окружности назовём «поворотной центрисой», или «центрисой перегибов».

СВОЙСТВА КРУГА ЛАГИРА

Соколов Г.М., Самсонова А.О., Чернова А.А.

Марийский государственный технический университет, Йошкар-Ола, e-mail: adirrozka@mail.ru

Рассмотрим свойства круга Лагира (поворотного круга, или круга перегибов).

Свойство 1. Разность алгебраических значений кривизны подвижной и неподвижной центроид в любой точке их сопряжения равна половине алгебраического значения кривизны окружности перегибов.

Связь между радиусами кривизны неподвижной и подвижной центроид

$$1/\rho_{\text{нц}} - 1/\rho_{\text{пц}} = 1/s'_{p\varsigma},$$

где $\left|s'_{p\varsigma}\right| = d_{1\text{л}} = 2r$ – диаметр круга Лагира. Поэтому

$$k_{\text{пц}} - k_{\text{нц}} = 0{,}5k_{\text{л}},$$

где $k_{\text{пц}}$ – кривизна подвижной центроиды; $k_{\text{нц}}$ – кривизна неподвижной центроиды, $k_{\text{л}}$ – кривизна окружности перегибов.

Свойство 2.

1 случай. $\rho_{\text{пц}}\rho_{\text{нц}} > 0$ – внутреннее касание центроид. Круг Лагира и центроиды лежат по отношению к их общей касательной с одной стороны. При этом, если $\rho_{\text{нц}} = \infty$, то $r_{\text{л}} = 0{,}5\rho_{\text{пц}}$ и полюс поворота K совпадает с центром кривизны подвижной центроиды $O_{\text{пц}}$; если $\rho_{\text{пц}} = \rho_{\text{нц}}$, то круг Лагира отсутствует ($r_{\text{л}} = \infty$).

2 случай. $\rho_{\text{пц}}\rho_{\text{нц}} < 0$ – внешнее касание центроид. Центроиды разделены касательной τ-τ, круг Лагира и подвижная центроида лежат с одной стороны по отношению к ней. При этом, если $\rho_{\text{пц}} = -\rho_{\text{нц}}$, то $r_{\text{л}} = 0{,}25\rho_{\text{нц}}$; если $\rho_{\text{нц}} = \infty$, то $r_{\text{л}} = 0{,}5\rho_{\text{пц}}$ и полюс поворота K совпадает с центром кривизны подвижной центроиды.

Таким образом, обе центроиды и круг Лагира имеют общие касательную *τ-τ* и нормаль *n-n* в точке P. Круг Лагира всегда расположен со стороны подвижной центроиды.

Свойство 3. Окружность перегибов разделяет подвижную плоскость на области по признаку знака кривизны их траекторий. Радиус кривизны точки M, для которой мгновенный радиус равен r и Э – прямая (прямая экстремумов) составляет угол φ с общей нормалью к центроидам (рис. 1) $\rho_M = r^2/(r - d_1\cos\phi)$. Знак ρ_M зависит от знака знаменателя.

При $r - d_1\cos\varphi > 0$ траектории точек подвижной плоскости, лежащих за пределами круга Лагира, к мгновенному центру вращения P обращены вогнутостями, а при $r - d_1\cos\varphi < 0$ (внутри круга Лагира) – выпуклостями. При $r - d_1\cos\varphi = 0$ $\rho_M = \infty$ (точка перегиба).

Свойство 4. Любая близлежащая к окружности перегибов точка подвижной плоскости в произвольном положении последней может входить в круг Лагира или выходить из него, соответственно, под острым углом ($0 < \varphi < \pi/2$), кроме точек P ($\varphi = \pi/2$) и K ($\varphi = 0$).

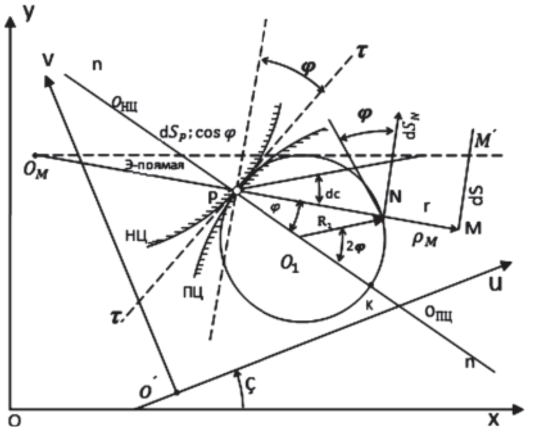


Рис. 1

Свойство 5. Геометрическое место центров кривизны траекторий точек окружности F, касающейся в точке P прямой τ-τ, является также окружностью, касающейся этой прямой в той же точке. Радиус окружности E и её положение зависят от отношения диаметров окружности F и круга Лагира (рис. 2). Положим, диаметр окружности F равен $d_F = nd_1$. Возможны случаи.

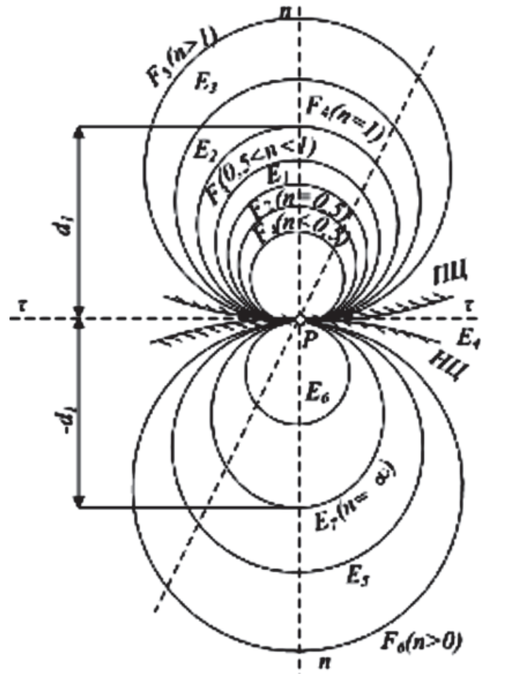


Рис. 2

1 случай. При $n < 1$ окружность F лежит внутри круга Лагира. Диаметр окружности E $d_E = nd_1/(1 - n)$. Окружность E и круг Лагира расположены относительно прямой τ-τ с одной стороны. При $n = 0{,}5$ $d_E = nd_1$ (пара $F_2 - E_2$), т.е. окружность E совпадает с поворотной окружностью. При $n < 0{,}5d_E < d_1$ ($F_1 - E_1$), а при $n > 0{,}5d_E > d_1$ ($F_3 - E_3$).

2 случай. При $n > 1$ окружность F лежит вне круга Лагира, находясь с ним с одной стороны по отношению к τ-τ, $d_E = nd_1/(1 - n)$. Окружность E и круг Лагира лежат по разные стороны от τ-τ, при этом $\left|d_E\right| > d_1$ (). Если $n = 1$, то окружность E вырождается в прямую τ-τ ($F_4 - E_4$).

3 случай. Для точек, находящихся с другой стороны от прямой τ-τ относительно круга Лагира, $d_E = nd_1/(1 + n)$. Если $0 < n \le 1$, то $\left|d_E\right| < d_1$ ($F_6 - E_6$).