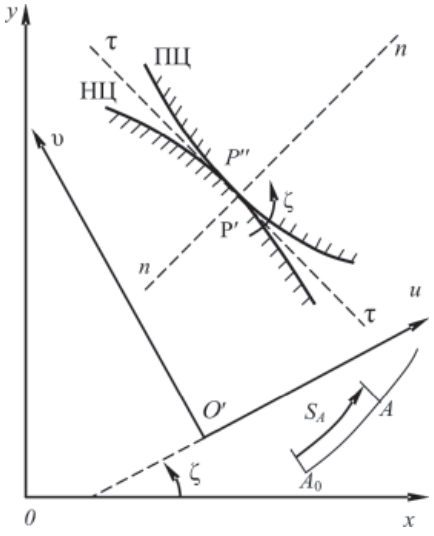
подвижной (МЦП) плоскостях в виде точек P' и P'', соответственно.

б) Если $ds_A \neq 0$, $\zeta'_{sA} = 0$ (поступательное движение), то $x_p = \infty$, $y_p = \infty$, $u_p = \infty$, $v_p = \infty$, т.е. точка P находится в бесконечности.

в) Если $ds_A = 0$, то при $d\zeta \neq 0$, $\zeta'_{sA} = \infty$, $x_p = x_A$, $y_p = y_A$ и $u_p = u_A$, $v_p = v_A$, т.е. мгновенное вращение происходит вокруг полюса A.



Выводы

1. Понятие «мгновенный центр перемещений» (МЦП) определено геометрическими признаками плоского движения тела.

2. Рассмотренные соотношения не содержат параметра времени t и являются следствием геометрической неизменяемости твердого тела.

ХАРАКТЕРНЫЕ ОБЛАСТИ ПОДВИЖНОЙ ПЛОСКОСТИ

Соколов Г.М., Коршунова Н.П., Кулыгина Е.В.

Марийский государственный технический университет, Йошкар-Ола, e-mail: mivlgu@mail.ru

В задачах на плоское движение твердого тела известны траектория полюса и угол поворота плоскости в функции от пути полюса. Используются понятия мгновенных центров скоростей (МЦС) и ускорений (МЦУ), круги Лагира (круг поворота, или круг перегибов) и Брессе (круг перемены), имеющие геометрические признаки, не включающие в себя параметра времени. Рассмотрим эти особенности.

Введем обозначения

$$B = \Gamma - \xi''_{sA} / \xi'_{sA},$$

где $\Gamma = s''_{sA} / s'_{sA}$; $K = -w_A^{\tau} / v_A^2$,

где v_A и w_A^{τ} – скорость и касательное ускорение полюса A.

Положим, $\nu''_{\mu} = 0$, $\Gamma = s''_{sA} / s'_{sA} = \text{const}$.

Эти выражения определяют единственную точку Q (рисунок), в которой одновременно выполняется два условия: из первого следует, что ее траектория имеет перегиб (нормальное ускорение точки равно нулю), второе свидетельствует о том, что при выполнении условия $\Gamma = K$ (ее касательное ускорение равно нулю).

Точку Q назовем мгновенным центром производных перемещений (МЦПП). При $\Gamma = -w_A^{\tau} / v_A^2$ она является мгновенным центром ускорений (МЦУ).

Ее координаты находятся совместным решением уравнений

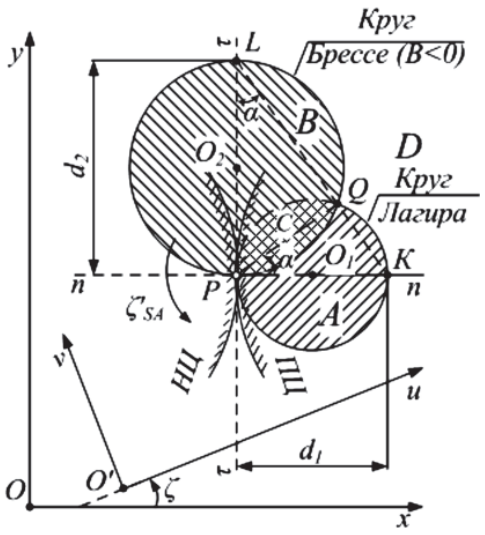
$$\left[x - \left(x_p + 0,5y'_{p\xi}\right)\right]^2 + \left[y - \left(y_p + 0,5x'_{p\xi}\right)\right]^2 = \left(0,5s'_{p\xi}\right)^2;$$

$$\left[x - \left(x_p - x'_{psA}/(2B)\right)\right]^2 + \left[y - \left(y_p - y'_{psA}/(2B)\right)\right]^2 = \left(s'_{psA}/(2B)\right)^2,$$

откуда

$$x_Q = x_P + (y'_{psA} - x'_{p\xi}B)\xi'_{sA} / (\xi'^2_{sA} + B^2),$$

$$y_Q = y_P - (x'_{psA} + y'_{p\xi}B)\xi'_{sA} / (\xi'^2_{sA} + B^2).$$



Координаты точки Q в подвижной системе отсчета $uO'v$ находятся по формулам перехода

$$u_Q = u_A + \left(x_Q - x_A\right)\cos\xi + \left(y_Q - y_A\right)\sin\xi;$$

$$v_Q = v_A - \left(x_Q - x_A\right)\sin\xi + \left(y_Q - y_A\right)\cos\xi.$$

Угол α:

$$\alpha = \text{arctg}(d_1 / d_2) = \text{arctg}(|B| / \xi'_{sA}).$$

Выделим следующие области подвижной плоскости.

Область A. Траектории точек этой области в направлении прямых, соединяющих эти точки с мгновенным центром перемещений (мгновенных радиусов), имеют экстремумы, и обращены выпуклостью к точке P. Радиусы кривизны их траекторий отрицательны ($\rho < 0$). При этом точки имеют свой знак разности ($\Gamma - K$). Положим, $\Gamma > K$.

Область B. Траектории точек в направлении мгновенных радиусов обращены вогнутостью к точке P. Радиусы их кривизны положительны ($\rho > 0$), при этом $\Gamma < K$.

Область C. Траектории точек в направлении мгновенных радиусов обращены выпуклостью к точке P. Радиусы их кривизны отрицательны ($\rho < 0$), при этом $\Gamma < K$.

Область D. Траектории точек в направлении мгновенных радиусов обращены вогнутостью к точке P. Радиусы их кривизны положительны ($\rho > 0$) , при этом $\Gamma > K$.

Характеристики областей приведены в таблице.

Рассмотрен пример

Области и их границы	ρ	$\Gamma - K$
A	<0	>0
A – C	<0	0
C	<0	<0
C – B	∞	<0
B	>0	<0
B – D	>0	0
D	>0	>0
A – D	∞	>0
Точка Q	∞	=0

Заданы: траектория точки A

$$y_A = -\frac{180}{\pi}\ln\cos\left(\frac{\pi x_A}{180}\right), \text{см};$$

закон изменения угла $\xi = \ln, s_A$ рад; координаты точки A: $u_A = 4$ см; $v_A = 6$ см ($u_B = 0$ см; $v_B = -36$ см).

Построены траектории точек A и B для положения подвижной плоскости, соответствующего положению точки A (30; 8,24) построены круг Лагира. Круг Брессе построен для двух вариантов:

1. При $v_A = 5$ см/с; $w_A^{\tau} = 2$ см/с^2.

2. При $v_A = 5$ см/с; $w_A^{\tau} = 0,25$ см/с^2.

Показано, что круг Брессе по отношению к нормали n-n располагается с той или с другой ее стороны в зависимости от знака B ($B > 0$ или $B < 0$).

Рассмотренные понятия мгновенного центра производных перемещений и характерных областей подвижной плоскости наглядно отражают геометрические признаки плоского движения твердого тела.

МГНОВЕННЫЙ РАДИУС. КРУГ ЛАГИРА

Соколов Г.М., Петрушина К.Г., Осокина Е.Ф.

Марийский государственный технический университет, Йошкар-Ола, e-mail: KseniyaPetrushinaG@yandex.ru

Определим семейство точек, траектории которых в направлении оси v (системы $vO\mu$), составляющей угол $\psi + \pi/2$ с осью x, имеют экстремумы, то есть

$$v'_{\mu} = \frac{v'_{SA}}{\mu'_{SA}} = 0.$$

С учетом

$$\mu'_{SA} = x'_{SA}\cos\psi + y'_{SA}\sin\psi;$$

$$v'_{SA} = -x'_{SA}\sin\psi + y'_{SA}\cos\psi;$$

$$x'_{SA} = x'_{ASA} - (u - u_A)\sin\varsigma\varsigma'_{SA} - (v - v_A)\cos\varsigma\varsigma'_{SA}$$

$$y'_{SA} = y'_{ASA} - (u - u_A)\cos\varsigma\varsigma'_{SA} - (v - v_A)\sin\varsigma\varsigma'_{SA};$$

имеем

$$-\left[x'_{ASA} - (y - y_A)\varsigma'_{SA}\right]\sin\psi + \left[y'_{ASA} + (x - x_A)\varsigma'_{SA}\right]\cos\psi.$$

Так как

$$x'_{SA} = -(y - y_P)\varsigma'_{SA}; \quad y'_{SA} = (x - x_P)\varsigma'_{SA};$$

то $(y - y_P) = -\text{ctg}\psi(x - x_P)$.

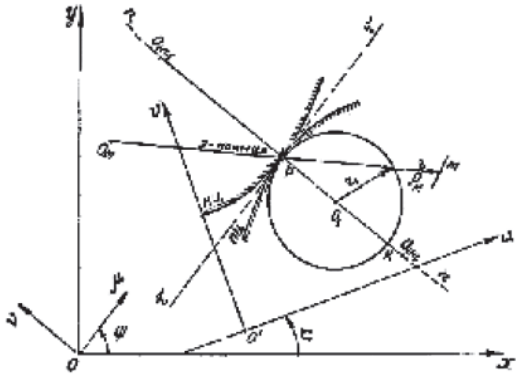
В подвижной системе координат на основании (рисунок)

$$x = x_A + (u - u_A)\cos\varsigma - (v - v_A)\sin\varsigma;$$

$$y = y_A + (u - u_A)\sin\varsigma + (v - v_A)\cos\varsigma$$

получим

$$(v - v_P) = -\text{ctg}(\psi - \varsigma)(u - u_P).$$



Из этих соотношений следует, что геометрическим местом точек, траектории которых имеют экстремумы, является прямая, соединяющая их с точкой P.

В общем случае (при $ds_A \neq 0$, $d\varsigma \neq 0$) прямая, соединяющая произвольную точку M подвижной плоскости с мгновенным центром перемещений точкой P², является геометрическим местом точек, траектории которых в направлении этой прямой на неподвижной плоскости имеют экстремумы. Прямую PM назовем Э-прямой (прямой экстремумов), а отрезок

PM называют мгновенным радиусом.

Его длина

$$r = \sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2} = \sqrt{(u - u_P)^2 + (v - v_P)^2}.$$

Определим семейство точек, траектории которых имеют точки перегиба, то есть

$$v''_{\mu} = \frac{\mu'_{SA}\cdot v''_{SA} - \mu''_{SA}\cdot v'_{SA}}{\mu'_{SA}} = 0,$$

откуда следует

$$\mu'_{SA}\cdot v''_{SA} - \mu''_{SA}v'_{SA} = 0.$$

Используя соотношения

$$\mu'_{SA} = x'_{SA}\cos\psi + y'_{SA}\sin\psi;$$
$$v'_{SA} = -x'_{SA}\sin\psi + y'_{SA}\cos\psi;$$
$$\mu''_{SA} = x''_{SA}\cos\psi + y''_{SA}\sin\psi;$$
$$v''_{SA} = -x''_{SA}\sin\psi + y''_{SA}\cos\psi.$$

И с учетом

$$x'_{SA} = -(y - y_P)\varsigma'_{SA}; \quad y'_{SA} = (x - x_P)\varsigma'_{SA};$$
$$x''_{SA} = -\left[(x - x_P)\varsigma'_{SA} - y'_{PSA}\right]\varsigma'_{SA} - (y - y_P)\varsigma''_{SA};$$
$$y''_{SA} = -\left[(y - y_P)\varsigma'_{SA} + x'_{PSA}\right]\varsigma'_{SA} + (x - x_P)\varsigma''_{SA}$$

получаем

$$(x - x_P)(y'_{SA} - y'_{PSA}) - (y - y_P)(x'_{SA} - x'_{PSA}) = 0,$$

где на основании

$$x_P = x_A - \varsigma'^{-1}_{yA}, \quad y_P = y_A - \varsigma'^{-1}_{xA}$$

имеем

$$x'_{PSA} = x'_{ASA} + \varsigma'^{-2}_{xA}\varsigma''_{yA}y'_{ASA},$$
$$y'_{PSA} = y'_{ASA} - \varsigma'^{-2}_{xA}\varsigma''_{yA}x'_{ASA}.$$

Отметим, что

$$x'^2_{PSA} + y'^2_{PSA} = s'^2_{PSA},$$

где s_a – длина дуги центроид.

Находим геометрическое место точек перегиба

$$\left[x - \left(x_P + 0,5y'_{p\varsigma}\right)\varsigma'_{SA}\right]^2 + \left[y - \left(y_P - 0,5x'_{p\varsigma}\right)\varsigma'_{SA}\right]^2 = \left(0,5s'_{p\varsigma}\right)^2,$$

где

$$x'_{p\varsigma} = x_{PSA}\varsigma'^{-1}_{yA}, \quad y'_{p\varsigma} = y'_{PSA}\varsigma'^{-1}_{yA}; \quad s'_{p\varsigma} = s_{PSA}\varsigma'^{-1}_{yA}.$$

Получено уравнение окружности радиуса $r_1 = 0,5s'_{p\varsigma}$, касающейся общей касательной τ-τ к центроидам в точке P, центр которой O_1 с координатами:

$$x_{O_1} = x_P + 0,5y'_{p\varsigma} \quad y_{O_1} = y_P + 0,5x'_{p\varsigma}$$

лежит на общей нормали к центроидам n-n. Точка

$$K\left[\left(x_P + y'_{p\varsigma}\right), \left(y_P - x'_{p\varsigma}\right)\right]$$

этой окружности называется полюсом поворота, в ней пересекаются векторы перемещений всех её точек.

Уравнение окружности в подвижной системе координат $uO'v$ получим на основании выражения

$$\left\{u - \left[u_P - 0,5\left(x'_{p\varsigma}\sin\varsigma - y'_{p\varsigma}\cos\varsigma\right)\right]\right\}^2 + \left\{v_P - \left[v + 0,5\left(x'_{p\varsigma}\cos\varsigma + y'_{p\varsigma}\sin\varsigma\right)\right]\right\}^2 = \left(0,5s'_{p\varsigma}\right)^2.$$