Радиус кривизны НЦ

$$\rho_{нц} = (1 + y'^2_{PuP})^{1,5} / y''_{PuP}.$$

Координаты центра кривизны НЦ (ее эволюты в системе xOy)

$$x_{Oнц} = x_P - y'_{PxP}\,(1 + y'^2_{PxP} / v''_{PxP});$$
$$y_{Oнц} = y_P + (1 + y'^2_{PxP} / y''_{PxP}).$$

Радиус кривизны ПЦ

$$\rho_{пц} = (1 + v'^2_{PuP})^{1,5} / v'_{PuP}.$$

Координаты центра кривизны ПЦ (ее эволюты в системе $uO'v$)

$$u_{Oпц} = u_P - u'_{PuP}(1 + v'^2_{PuP}) / v''_{PuP};$$
$$v_{Oпц} = v_P + (1 + v'^2_{PuP} / v''_{PuP}).$$

Установлены соотношения для произвольной точки B ($u_в$, $v_в$). Если заданы $AB = l$ и угол ϕ, то координаты точки B в неподвижной системе

$$x_B = x_A - l\cos(\zeta + \phi),$$
$$y_B = y_A - l\sin(\zeta + \phi).$$

Радиус кривизны и координаты центра кривизны ее траектории

$$\rho_B = (1 + y'^2_{BxB})^{1,5} / y''_{BxB};$$
$$x_{OB} = x_B - y'_{BxB}(1 + y'^2_{BxB}) / y''_{BxB};$$
$$y_{OB} = y_B - (1 + y'^2_{BxB} / y''_{BxB}).$$

Рассмотрены особенности, вытекающие из соотношения между величинами ς'_{sA} и ϑ'_{sA}.

Введены понятия коэффициентов поворота в точках A и B в заданном направлении. Коэффициенты поворота в точках

$$k_A = \alpha'_{AxA} s'^{-1}_{xA},$$
$$k_B = \alpha'_{BxB} x'_{BxA} s'^{-1}_{xA}.$$

Коэффициент поворота плоскости

$$k_П = \zeta'_{xA} s'^{-1}_{xA}.$$

Приведем другие способы задания плоского движения тела.

1. Траектория двух точек плоскости.
2. Траектория точки и коэффициент поворота в ней.
3. Траектория одной точки и коэффициент поворота в другой.
4. Траектория точки и уравнение неподвижной центроиды.
5. Траектория точки и уравнение подвижной центроиды.
6. Траектория точки и коэффициент поворота плоскости.
7. Коэффициенты поворота в двух точках.
8. Коэффициент поворота в точке и коэффициент поворота плоскости.
9. Коэффициент поворота в точке и уравнение неподвижной центроиды.
10. Коэффициент поворота в точке и уравнение подвижной центроиды.
11. Уравнение неподвижной центроиды и коэффициент поворота плоскости.
12. Уравнение подвижной центроиды и коэффициент поворота плоскости.
13. Уравнения подвижной и неподвижной центроид.

Эти способы охватывают широкий круг задач и могут найти практическое применение при их решении.

МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Соколов Г.М., Елсукова Е.А., Косульникова Ю.А.

Марийский государственный технический университет, Йошкар-Ола, e-mail: elsukova_L@mail.ru

При изучении плоского движения твёрдого тела используется понятие мгновенного

центра скоростей – МЦС. Вместе с тем, не привлекая параметра времени, можно определить понятие мгновенного центра перемещений, предшествующее по смыслу понятию МЦС, которое расширяет возможности инженерных исследований.

Исследуем точки плоскости с системой координат $uO'v$, движущейся относительно неподвижной системы xOy, когда задана траектория полюса A и угол поворота плоскости в зависимости от пути полюса

$$y_A = y_A(x_A);$$
$$\zeta_A = \zeta_A(s_A).$$

Формулы перехода между координатами:
от xOy к $uO'v$

$$u = u_A + (x - x_A)\cos\zeta + (y - y_A)\sin\zeta;$$
$$v = v_A + (x - x_A)\sin\zeta + (y - y_A)\cos\zeta;$$

от $uO'v$ к xOy

$$x = x_A + (u - u_A)\cos\zeta - (v - v_A)\sin\zeta;$$
$$y = y_A + (u - u_A)\sin\zeta - (v - v_A)\cos\zeta.$$

Производные

$$x'_{sA} = x'_{AsA} - (y - y_A)\,\zeta'_{sA};$$
$$y'_{sA} = y'_{AsA} - (x - x_A)\,\zeta'_{sA};$$
$$x''_{sA} = x''_{AsA} - (x - x_A)\zeta'^2_{sA} - (y - y_A)\zeta''^2_{sA};$$
$$y''_{sA} = y''_{AsA} - (y - y_A)\zeta'^2_{sA} + (x - x_A)\zeta''^2_{sA}.$$

Производные перемещений произвольной точки по перемещению точки A связаны соотношением

$$s'_{sA} = \sqrt{x^2_{sA} + y'^2_{sA}}.$$

Положим, $s'_{sA} = 0$, тогда $x'_{AsA} = 0$, $y'_{AsA} = 0$.

Этот признак определяет единственную точку подвижной плоскости P'', перемещение которой при $d\zeta \neq 0$ равно нулю. Назовем ее мгновенным центром перемещений (МЦП). Она соответствует известному в кинематике понятию мгновенного центра скоростей (МЦС). Точка P' неподвижной плоскости, совпадающая с точкой P'', является мгновенным центром вращения (МЦВ).

Координаты МЦВ

$$x_p = x_p - \zeta'^{-1}_{yA}; \quad y_p = y_p - \zeta'^{-1}_{xA};$$

где

$$\zeta'_{yA} = \zeta'_{sA} y'^{-1}_{AsA}; \quad \zeta'_{xA} = \zeta'_{sA} x'^{-1}_{AsA}.$$

Геометрическое место мгновенных центров вращения на неподвижной плоскости для последовательных положений подвижной плоскости является неподвижной центроидой (НЦ) (рисунок).

Координаты точки МЦП в подвижной системе $uO'v$

$$u_p = u_A - \zeta^{-1}_{xA}\left(y'_{AxA}\cos\zeta - \sin\zeta\right);$$

$$v_p = v_A + \zeta^{-1}_{xA}\left(\cos\zeta + y'_{AxA}\sin\zeta\right).$$

Геометрическое место МЦП на подвижной плоскости является подвижной центроидой (ПЦ).

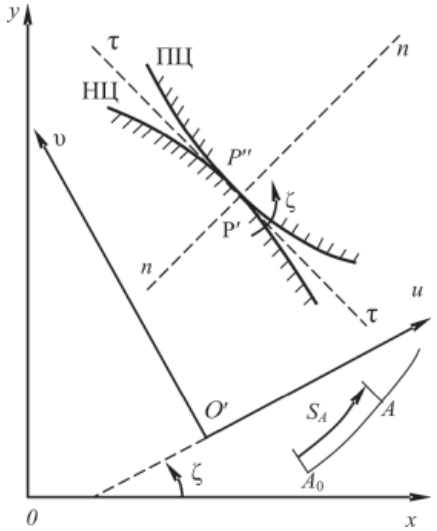
Отметим следующее.

а) Если $ds_A \neq 0$ ($\zeta'_{sA} \neq \infty$), $d\zeta \neq 0$ (общий случай), то точка P имеет отображение на неподвижной (МЦВ) и

подвижной (МЦП) плоскостях в виде точек P' и P'', соответственно.

б) Если $ds_A \neq 0$, $\zeta'_{sA} = 0$ (поступательное движение), то $x_p = \infty$, $y_p = \infty$, $u_p = \infty$, $v_p = \infty$, т.е. точка P находится в бесконечности.

в) Если $ds_A = 0$, то при $d\zeta \neq 0$, $\zeta'_{sA} = \infty$, $x_p = x_A$, $y_p = y_A$ и $u_p = u_A$, $v_p = v_A$, т.е. мгновенное вращение происходит вокруг полюса A.



Выводы

1. Понятие «мгновенный центр перемещений» (МЦП) определено геометрическими признаками плоского движения тела.

2. Рассмотренные соотношения не содержат параметра времени t и являются следствием геометрической неизменяемости твердого тела.

ХАРАКТЕРНЫЕ ОБЛАСТИ ПОДВИЖНОЙ ПЛОСКОСТИ

Соколов Г.М., Коршунова Н.П., Кулыгина Е.В.

Марийский государственный технический университет, Йошкар-Ола, e-mail: mivlgu@mail.ru

В задачах на плоское движение твердого тела известны траектория полюса и угол поворота плоскости в функции от пути полюса. Используются понятия мгновенных центров скоростей (МЦС) и ускорений (МЦУ), круги Лагира (круг поворота, или круг перегибов) и Брессе (круг перемены), имеющие геометрические признаки, не включающие в себя параметра времени. Рассмотрим эти особенности.

Введем обозначения

$$B = \Gamma - \xi''_{sA} / \xi'_{sA},$$

где $\Gamma = s''_{sA} / s'_{sA}$; $K = -w_A^{\tau} / v_A^2$,

где v_A и w_A^{τ} – скорость и касательное ускорение полюса A.

Положим, $v''_{\mu} = 0$, $\Gamma = s''_{sA} / s'_{sA} = \text{const}$.

Эти выражения определяют единственную точку Q (рисунок), в которой одновременно выполняется два условия: из первого следует, что ее траектория имеет перегиб (нормальное ускорение точки равно нулю), второе свидетельствует о том, что при выполнении условия $\Gamma = K$ (ее касательное ускорение равно нулю).

Точку Q назовем мгновенным центром производных перемещений (МЦПП). При $\Gamma = -w_A^{\tau} / v_A^2$ она является мгновенным центром ускорений (МЦУ).

Ее координаты находятся совместным решением уравнений

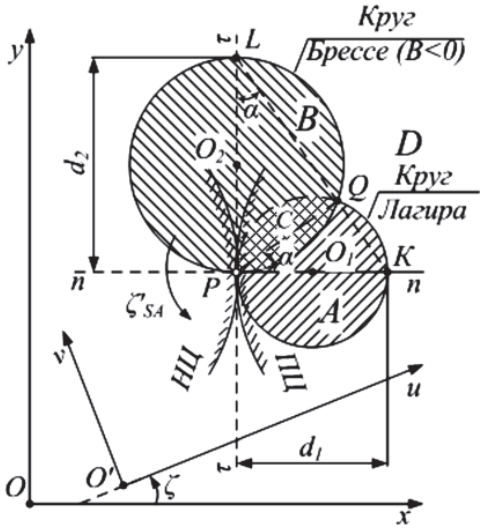
$$\left[x - \left(x_p + 0,5y'_{p\xi}\right)\right]^2 + \left[y - \left(y_p + 0,5x'_{p\xi}\right)\right]^2 = \left(0,5s'_{p\xi}\right)^2;$$

$$\left[x - \left(x_p - x'_{psA} / (2B)\right)\right]^2 + \left[y - \left(y_p - y'_{psA} / (2B)\right)\right]^2 = \left(s'_{psA} / (2B)\right)^2,$$

откуда

$$x_Q = x_P + (y'_{psA} - x'_{p\xi}B)\xi'_{sA} / (\xi'^2_{sA} + B^2),$$

$$y_Q = y_P - (x'_{psA} + y'_{p\xi}B)\xi'_{sA} / (\xi'^2_{sA} + B^2).$$



Координаты точки Q в подвижной системе отсчета $uO'v$ находятся по формулам перехода

$$u_Q = u_A + \left(x_Q - x_A\right)\cos\xi + \left(y_Q - y_A\right)\sin\xi;$$

$$v_Q = v_A - \left(x_Q - x_A\right)\sin\xi + \left(y_Q - y_A\right)\cos\xi.$$

Угол α:

$$\alpha = \text{arctg}(d_1 / d_2) = \text{arctg}(|B| / \xi'_{sA}).$$

Выделим следующие области подвижной плоскости.

Область A. Траектории точек этой области в направлении прямых, соединяющих эти точки с мгновенным центром перемещений (мгновенных радиусов), имеют экстремумы, и обращены выпуклостью к точке P. Радиусы кривизны их траекторий отрицательны ($\rho < 0$). При этом точки имеют свой знак разности ($\Gamma - K$). Положим, $\Gamma > K$.

Область B. Траектории точек в направлении мгновенных радиусов обращены вогнутостью к точке P. Радиусы их кривизны положительны ($\rho > 0$), при этом $\Gamma < K$.

Область C. Траектории точек в направлении мгновенных радиусов обращены выпуклостью к точке P. Радиусы их кривизны отрицательны ($\rho < 0$), при этом $\Gamma < K$.

Область D. Траектории точек в направлении мгновенных радиусов обращены вогнутостью к точке P. Радиусы их кривизны положительны ($\rho > 0$) , при этом $\Gamma > K$.

Характеристики областей приведены в таблице.

Рассмотрен пример

Области и их границы	ρ	Γ – K
A	<0	>0
A – C	<0	0
C	<0	<0
C – B	∞	<0
B	>0	<0
B – D	>0	0
D	>0	>0
A – D	∞	>0
Точка Q	∞	=0