подшипников скольжения это условие не соблюдается, поэтому расчеты с использованием формулы Герца дают большую погрешность. В практических расчетах следует применять иные подходы для нахождения площади контакта в подшипниках.

По закону Гука ширина площадки b, действующая нагрузка F и механические свойства контактирующих тел связаны соотношением:

$$b = \frac{F}{hl}\left(\frac{r}{E_1} + \frac{t}{E_2}\right),$$

где h – суммарная деформация тел равная сближению; t – толщина подшипника; l – длина площадки контакта в направлении осей; E_1, E_2 – соответственно модули упругости материалов вала и подшипника.

Для подтверждения этой формулы проводились опыты. Были изготовлены вал из стали 45 и две втулки из антифрикционных сплавов. Контактные поверхности образцов изготавливались шлифованием и имели шероховатость поверхности $R_z = 0{,}5\ldots0{,}63$ мкм. Модули упругости при сжатии вала E_1 и втулок E_2 определялись экспериментально по соответствующей методике и составляли: для стального вала – 201030 МПа, для первой втулки – 84268 МПа, для второй втулки – 59123 МПа. Диаметр вала измерялся в нескольких сечениях микрометром и составил 40 + 0,002 мм. Диаметры втулок также измерялись микрометром и составили для первой втулки 40,12 мм, а для второй 40,32 мм. Площадь контакта определялась по отпечатку тонко окрашенного вала на поверхности втулки. Результаты экспериментов подтвердили достаточную точность данной формулы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПОДВИЖНОЙ ЦЕНТРОИДЫ В УСЛОВИЯХ ЗАДАЧИ П.В. МАКОВЕЦКОГО

Соколов Г.М., Васеева А.Э., Егорова Н.А.

Марийский государственный технический университет, Йошкар-Ола, e-mail: nataxax@gmail.com

В книге П.В. Маковецкого «Смотри в корень» сформулирована задача о качении без скольжения тела правильной геометрической формы при заданной прямолинейной траектории его фиксированной точки. Её решение оказалось непосильным для автора. Приводится решение этой задачи на основе теории плоского движения твердого тела.

Задано уравнение контура тела (подвижной центроиды) $v_p = v_p(u_p)$ в системе координат $uO'v$, жестко скрепленной с телом, и уравнение траектории точки $A(u_A, v_A)y_A = y_A(x_A)$ в неподвижной системе xOy (рис. 1). Требуется определить неподвижную центроиду.

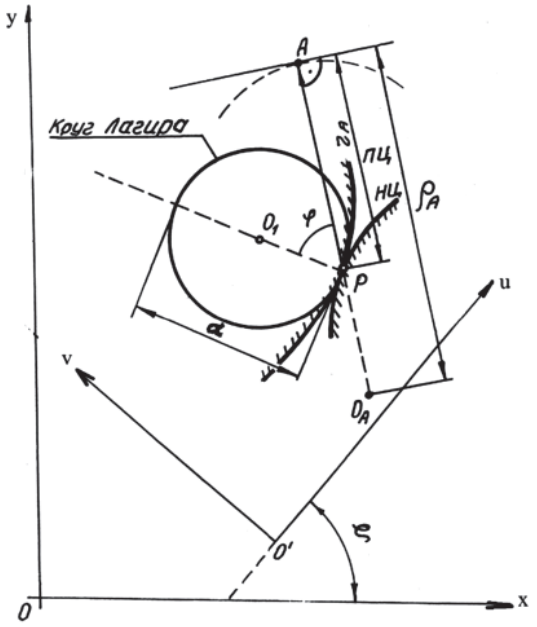

Рис. 1

Угол ξ поворота подвижной системы $uO'v$ относительно неподвижной xOy

$$\xi = \arccos[1/(1+y'^2_{AxA})^{0,5}] - \arccos\{(u_A - u_P)/[(u_A - u_P)^2 + (v_A - v_P)^2]^{0,5}\}.$$

Это выражение является разрешающим, с помощью которого устанавливается связь между положениями точки A и мгновенного центра вращения точки P. Используем выражение радиуса кривизны траектории точки A

$$\rho_A = \frac{r_A^2}{r_A - d\cos\varphi},$$

где r_A – мгновенный радиус точки A. Диаметр круга Лагира $d = S'_{p\xi}$ (S_p – длина дуги центроид), угол между мгновенным радиусом точки A и общей нормалью к центроидам

$$\varphi = \arccos\left\{\left[\left(v_A - v_p - v'_{PuP}\left(u_A - u_p\right)\right)\right] \Big/ \left[r_A\left(1 + v'^2_{PuP}\right)^{0,5}\right]\right\}.$$

С учетом того, что

$$\rho_A = \left[\left(1 + \left(y'_{AxA}\right)^2\right)^{1,5}\right] \Big/ y''_{AxA},$$

имеем

$$\xi'_{sp} = \rho_A \cos\phi / [r_A(\rho_A - r_A)].$$

Признаком экстремума неподвижной центроиды является равенство нулю первой производной $y''_{PxP} = 0$. Признаком точки перегиба является равенство нулю второй производной $y''_{PxP} = 0$. Координаты произвольной точки тела определяются по формулам

$$x = x_A + \left(u - u_A\right)\cos\xi - \left(v - v_A\right)\sin\xi,$$

$$y = y_A + \left(u - u_A\right)\sin\xi + \left(v - v_A\right)\cos\xi.$$

Рассмотрены случаи, когда точка A движется по прямой $y_A = \text{const}$ ($\rho_A = \infty$) и контур тела ограничен прямыми $\left(v'_{PuP} = \text{const}\right)$.

Пример 1. Качение правильного треугольника при $y_A = a\sqrt{3}/3$ см (рис. 2). Известна сторона треугольника $a = 3$ см. При наличии симметрии достаточно построить один из «ухабов» (они повторяются). Из рисунка видно, что имеет место подрезание.

Пример 2. Качение четырехугольника произвольной формы при $y_A = 5{,}3$ см (рис. 3). Заданы размеры: $\vartheta_1 = 55{,}26°$; $\vartheta_2 = 24{,}44°$; $\vartheta_3 = 58{,}18°$; $\vartheta_4 = 35{,}73°$; $BC = 6{,}45$ см; $CD = 5$ см; $DE = 4$ см; $BE = 6$ см. Подрезание также имеется. Ясно, что оно имеет место при условии, когда внутренний угол при вершине контура (в общем случае, угол между сопряженными в ней касательными) не превышает 90°.

Отметим следующее.

1. Получено общее решение задачи П.В. Маковецкого о качении без скольжения тел произвольной формы при движении фиксированной точки по заданной траектории.

2. Подтверждено отмеченное автором наличие подрезания, возникающего из-за геометрической несовместимости габаритной полосы движения тела и неподвижной центроиды, установлено условие его появления.

3. В решении задачи, возможно, кроется разгадка строительства египетских пирамид, когда

тяжелые плиты вручную поднимались по «подкатным» путям, обеспечивающим траектории центров тяжести плит с небольшими углами наклона к горизонтали.

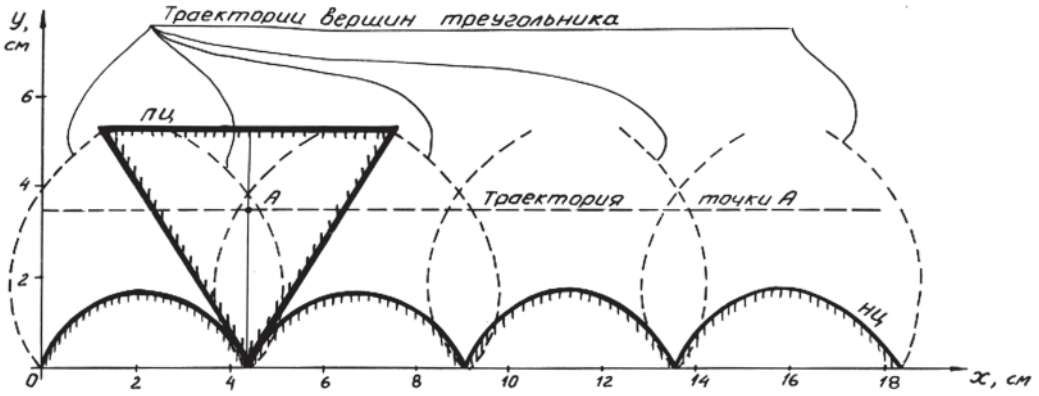

Рис. 2

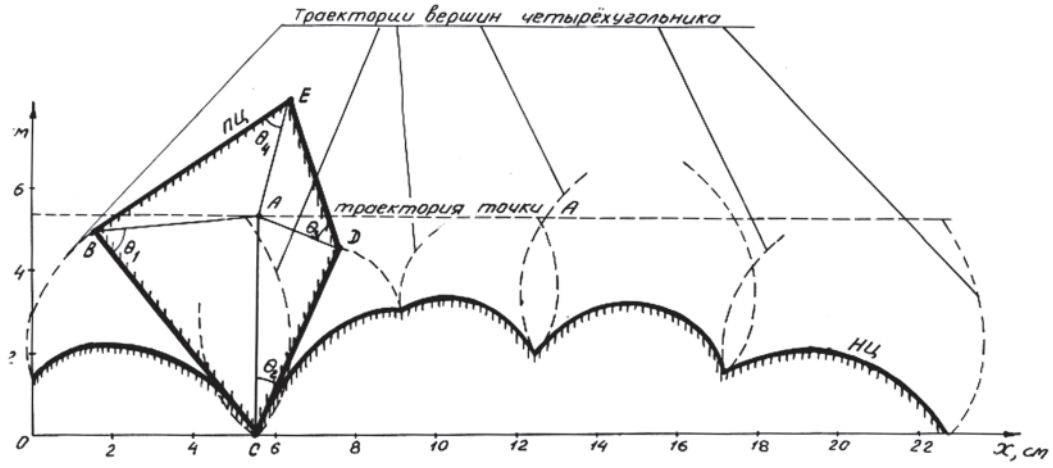

Рис. 3

4. Выполненное решение может быть положено в основу проектирования зубчатых передач, в которых отсутствует трение скольжения, приводящее к преждевременному износу существующих пар с эвольвентным зацеплением.

СВОЙСТВА КРУГА БРЕССЕ

Соколов Г.М., Васенева А.Э., Иванова Н.С.

Марийский государственный технический университет, Йошкар-Ола, e-mail: nastjgirl_1@mail.ru

Пусть движение плоскости с системой координат $uO'v$ относительно неподвижной системы xOy задано уравнениями

$$x_A = x_A(s_A);$$
$$y_A = y_A(s_A);$$
$$\varsigma_A = \varsigma_A(s_A),$$

где s_A – путь полюса A, а ς – угол поворота подвижной плоскости относительно неподвижной.

Определим семейство точек подвижной плоскости, для которых величина в данном положении плоскости соблюдается выражение

$$\Gamma = s''_{sA} / s'_{sA} = \text{const}.$$

На основании соотношений

$$x'_{sA} = -(y - y_P)\varsigma'_{sA};$$
$$y_{sA} = (x - x_P)\varsigma_{sA};$$
$$x''_{sA} = [(x - x_P)\varsigma'_{sA} - y'_{psA}]\varsigma'_{sA} - (y - y_p)\varsigma''_{sA};$$
$$y''_{sA} = [(y - y_P)\varsigma'_{sA} + x'_{psA}]\varsigma'_{sA} - (x - x_p)\varsigma''_{sA}$$

определим геометрическое место точек, удовлетворяющих заданному признаку,

$$[x - (x_P - x'_{psA}/(2B)]^2 + [y - (y_p - y'_{psA}/(2B)]^2 = [s'_{psA}/(2B)]^2,$$

где $B = \Gamma - \varsigma''_{sA} / \varsigma'_s$ (величины с индексом p относятся к мгновенному центру перемещений).

Получено уравнение окружности радиуса $r_2 = s'_{psA}/(2\,B)$, координаты центра O_2 которой

$$x_{O2} = x_p - x'_{psA}/(2\,B);$$
$$y_{O2} = y_p - y'_{psA}/(2\,B).$$

В подвижной системе координат $uO'v$ это уравнение имеет вид

$$(u - u_{O2})^2 + (v - v_{O2})^2 = r_2^2,$$

где координаты точки $O_2(u_{O2}, v_{O2})$ находятся по формулам перехода между координатными осями

$$u_{O2} = u_A + (x_{O2} - x_A)\cos\xi + (y_{O2} - y_A)\sin\xi,$$

$$v_{O2} = v_A - (x_{O2} - x_A)\sin\xi + (y_{O2} - y_A)\cos\xi.$$