особенности, некоторые из которых далее будут рассмотрены. Однако главную из них отметим сейчас. Классическая математика обычно рассматривает задачи с точки зрения доказательства существования и единственности решения и его характерных свойств. При этом, конечно. применяются и конструктивные алгоритмы, указывающие способ построения решения, но они часто имеют вид бесконечных процессов, дающих решение лишь е пределе. Поэтому возникла вычислительная математика которая занимается построением и анализом численных методов, позволяющих получить достаточно точное решение за конечное число шагов. допускающих возможность оценить сделанную ошибку и, быть может, указать приемы эффективного уменьшения этой ошибки.

В сложных задачах обычно неприменим в силу того, что границы области ответа становятся настолько большими, что говорить о значении ответа становится бессмысленным. другим способом оценки влияния округления является решение задачи с обычной и двойной точностью. Принято считать, что совпадающие в двух ответах разряды верны. Выполнив таким образом несколько вариантов типичных вычислений, далее можно вести остальные расчеты с обычной точностью, полагая, что я в них верно го же самое количество разрядов. Хотя опасности этого метода очевидны, тем не менее он используется на практике и обычно дает более точные результаты, чем метод области ответа.

Существуют статистические методы оценки влияния округления.

Без вывода приведем оценки погрешностей для отдельных арифметических операций над приближенными числами, для простоты обозначим

$$\Delta X = \Delta(X);$$
$$\Delta Y = \Delta(Y);$$
$$\delta X = \delta(X);$$
$$\delta Y = \delta(Y).$$

При сложения или вычитании чисел их абсолютные складываются

$$\Delta(X \pm Y) = \Delta X + \Delta Y \qquad (1)$$

для относительных погрешностей суммы или разности формулы имеют вид

$$\delta(X+Y) = \frac{\Delta X + \Delta Y}{|X+Y|} = \frac{X}{|X+Y|}\delta X + \frac{Y}{|X+Y|}\delta Y \qquad (2)$$

$$\delta(X-Y) = \frac{\Delta X + \Delta Y}{|X-Y|} = \frac{X}{|X-Y|}\delta X + \frac{Y}{|X-Y|}\delta Y \qquad (3)$$

Формулы для погрешностей при умножения и делении имеют вид

$$\Delta(X \cdot Y) = |X| \cdot \Delta Y + |Y| \cdot \Delta X \qquad (4)$$

$$\Delta(X / Y) = \left(|Y \cdot \Delta X + |X|| \cdot \Delta Y\right) / Y^2 \qquad (5)$$

$$\delta(X \cdot Y) = \delta X + \delta Y \qquad (6)$$

$$\delta(X / Y) = \delta X + \delta Y \qquad (7)$$

Из (3) следует практически важный вывод о значительной потере точности при вычитании близких чисел, действительно, при $X \approx Y$ относительная погрешность может быть сколь угодно большой.

О ЗАКОНЕ АРХИМЕДА

Снопов А.И.
Южный Федеральный университет
Ростов-на-Дону, Россия

2250 лет тому назад Архимед теоретически установил величину и направление силового воздействия покоящейся жидкости на неподвижно расположенное в ней тело. Изучение открытого им закона входит в школьные и вузовские программы. К сожалению, и на сегодняшний день в учебниках при изложении доказательства закона Архимеда, уже современными математическими методами, плотность жидкости зачастую принимают постоянной [1, 2, 3,.4], что, в частности, не позволяет объяснить и рассчитать глубину плавания подводных тел и высоту подъема аэростатов.

Ниже предложен вариант обобщения закона Архимеда на случаи абсолютного и относительного неподвижного состояния тела в баротропной жидкости, находящейся в абсолютном или относительном равновесии при наличии силового поля тяжести, который может быть использован в вузовских лекционных курсах.

Абсолютное равновесие

При равновесии в жидкости развиваются только нормальные напряжения. Силовое воздействие тяжелой покоящейся жидкости на помещенное в ней неподвижное тело, не имеющее контактов с другими телами, создаваемое совокупностью давлений p на поверхности тела S, называют силой Архимеда, которая вычисляется по формуле

$$\vec{W}_{Arch} = \iint_S (-p\vec{n}^0)dS \qquad (1)$$

Силы давлений порождены полем силы тяжести, обладающим потенциалом

$$U = \vec{g}\cdot\vec{r} + C \qquad (2)$$

где $\vec{r}$ - радиус вектор частицы жидкости, находящейся в этом поле. $\vec{g}$ - вектор ускорения земного притяжения.

Из гидростатики известно, что поверхности равных давлений, равных плотностей и поверхности разрыва плотностей совпадают с поверхностями уровня силового поля $U = const$. Поэтому можно плотность жидкости ρ рассматривать как функцию потенциала U ($\rho = \rho(U)$).

Для вычисления силы Архимеда мысленно извлечем из жидкости тело, сохраняя равновесие жидкости, а образовавшуюся пустоту, ограниченную поверхностью S, заполним покоящейся жидкостью с тем же распределение плотностей, что и в окружающей жидкости. Равновесие всей жидкости при этом сохранится, поля давлений вне и на поверхности S не изменятся. Будет находиться в равновесии и объем жидкости, ограниченный поверхностью S.

Воспользуемся теоремой о движении центра масс механической системы. В соответствии с ней центр масс движется как материальная точка, к которой приложены все внешние силы, действующие на систему, и в которой сосредоточена вся масса системы. Теорема, очевидно, справедлива и для равновесия системы. В рассматриваемом случае на выделенный объем жидкости действуют сила Архимеда (1) и параллельные силы тяжести частиц жидкости, заполнившей объем τ, ограниченный поверхностью S, которые обладают, как известно из теоретической механики, равнодействующей, определенной интегралом

$$\iiint_\tau \vec{g}\rho(U)d\tau \qquad (3)$$

Она приложена в центре масс *C* этой части жидкости. Векторная координата центра масс находится по формуле

$$\vec{r}_C = \frac{\iiint_\tau \bar{r}\rho(U)d\tau}{\iiint_\tau \rho(U)d\tau} \qquad (4)$$

Согласно теореме о движении центра масс, с учетом того, что рассматривается случай покоя, записываем равенство

$$0=\vec{W}_{Arch}+\iiint_{\tau}\vec{g}\rho(U)d\tau \quad (5)$$

Из этого уравнения следует формула, определяющая силу Архимеда

$$\vec{W}_{Arch}=-\vec{g}\iiint_{\tau}\rho(U)d\tau \quad (6)$$

Так как сила Архимеда уравновешена одной силой – силой тяжести вытесненной жидкости, приложенной в точке с координатой $\vec{r}_C$, определяемой по формуле (4), то линия действия силы Архимеда обязательно проходит через эту точку C.

Формулы (6) и (4) составляют суть закона Архимеда.

Относительное равновесие

При относительном равновесии жидкости должны быть равными нулю относительные скорости и относительные ускорения частиц жидкости, а также ускорение Кориолиса, и оставаться постоянным вектор угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}$. Следовательно, для относительного равновесия жидкости переносное ускорение может иметь только такое представление

$$\vec{w}_e=\vec{w}_0+\omega^2\vec{R} \quad (7)$$

где $\vec{w}_0=\dfrac{d^2\vec{r}_o}{dt^2}$ - ускорение полюса тела, положение которого в неподвижной системе координат определяется вектором $\vec{r}_o$, $\vec{R}$ - векторное расстояние до оси вращения частицы жидкости, имеющей координату $\vec{r}$, вычисляемое по формуле $\vec{R}=-\{\vec{r}-\vec{r}_o-\vec{\omega}^0[(\vec{r}-\vec{r}_o)\cdot\vec{\omega}^0]\}$.

С учетом формулы (7) уравнение относительного равновесия жидкости, находящейся в поле силы тяжести и инерционных сил, имеет вид

$$\vec{g}-\vec{w}_0-\omega^2\vec{R}=\frac{1}{\rho(p)}\nabla p \quad (8)$$

Потенциал Φ силового поля, соответствующего левой части уравнения (8), определяется по формуле

$$\Phi=(\vec{g}-\vec{w}_0)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_o)-\frac{1}{2}\omega^2R^2 \quad (9)$$

При этом $\vec{g}-\vec{w}_0-\omega^2\vec{R}=\nabla\Phi$.

На поверхностях уровня, описываемых уравнениями $\Phi=const$, сохраняются постоянными давления и плотности. Поверхности разрыва плотности также совпадают с соответствующими поверхностями уровня. Поэтому целесообразно рассматривать плотность, как функцию потенциала Φ ($\rho=\rho(\Phi)$.).

Определяем, пользуясь теоремой о движении центра масс, силовое воздействие жидкости, находящейся в относительном равновесном состоянии при поступательно-вращательном движении, на тело, удерживаемое в ней в относительном неподвижном состоянии. Воздействие жидкости на поверхность S тела при относительном равновесии такое же, как и на поверхность S жидкости, замещающей тело, если только сохраняется относительное равновесие всей жидкости. В исследуемом случае центр масс C_* замещающего жидкого объема τ движется по окружности радиуса $\vec{R}_{C_*}$ с ускорением $\omega^2\vec{R}_{C_*}$.под действием сил давлений, распределенных по поверхности S и системы параллельных сил $(\vec{g}-\vec{w}_0)\rho(\Phi)d\tau$, действующих на каждую частицу замещающей жидкости. Система этих сил имеет равнодействующую, определяемую таким интегралом

$$\iiint\limits_{\tau}(\vec{g}-\vec{w}_0)\rho(\Phi)d\tau \qquad (10)$$

Она приложена в центре масс C_*, положение которого находится по формуле

$$\vec{r}_{C_*}=\frac{\iiint\limits_{\tau}\vec{r}\rho(\Phi)d\tau}{\iiint\limits_{\tau}\rho(\Phi)d\tau} \qquad (11)$$

Уравнение движения центра масс записывается так

$$\omega^2\vec{R}_{C_*}\iiint\limits_{\tau}\rho(\Phi)d\tau=\vec{W}_{Arch}+\iiint\limits_{\tau}(\vec{g}-\vec{w}_0)\rho(\Phi)d\tau \qquad (12)$$

Из этого уравнения следует формула для вычисления силы Архимеда, действующей со стороны жидкости на помещенное в нее тело при относительном равновесии

$$\vec{W}_{Arch}=\omega^2\vec{R}_{C_*}\iiint\limits_{\tau}\rho(\Phi)d\tau+[-(\vec{g}-\vec{w}_0)\iiint\limits_{\tau}\rho(\Phi)d\tau] \qquad (13)$$

где $\vec{R}_{C_*}=-\{\vec{r}_{C_*}-\vec{r}_o-\vec{\omega}^0[(\vec{r}_{C_*}-\vec{r}_o)\cdot\vec{\omega}^0]\}$.

Как видим, полная сила Архимеда при относительном равновесии приложена в центре масс заместившей тело жидкости C_*, положение которого определяется по формуле (11), и равна сумме двух сил Архимеда: центростремительной силы Архимеда (первое слагаемое в формуле (13)), порожденной вращением жидкости, заместившей тело, и выталкивающей силы Архимеда, противоположно направленной сумме сил тяжести и инерции переносного поступательного движения жидкости, заместившей тело (слагаемое в квадратных скобках в формуле (13)).

Заметим, что положения центров тяжести жидкостей, заместивших тело, как и их массы, могут не совпадать в абсолютном и относительном равновесиях и могут зависть от расположения и ориентации тела, погруженного в жидкость.

Формулы (13) и (11) составляют суть закона Архимеда для воздействия баротропной жидкости, находящейся в относительном равновесии, на относительно неподвижно расположенное в ней тело. Их частными случаями являются формулы (6) и (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л.Г.Механика жидкости и газа..М., 1973. 817 с.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.Я., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. М., 1963. Т. 1, 586 с.
3. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. Л., Издательство ЛГУ, 1978, 286 с.
4. Batchelor G.K. An Introduction to Fluid Dinamics. Cambridge University. 2000. 631 pp.

Физико-математические науки

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СЛАБОЙ И СВЕРХСЛАБОЙ ЭНЕРГИИ КОСМОЛОГИИ В СОВРЕМЕННОМ ЕСТЕСТВОЗНАНИИ

Вапняр В.В.
Медицинский радиологический научный центр РАМН
Обнинск, Россия

Последние триста лет существующее естествознание, базируемое на учении Ньютона и основанное на детерминизме, заранее предопределяет траектории эволюционного развития прошлого, настоящего и будущего в замкнутом мире разобщенных материи, пространства и времени. Наиболее значимые достижения современного естествознания получили развитие в XIX-XX веках. А. Эйнштейн разрабатывает общую теорию относительности, учитывая теорию квантовой гравитации, берет за основу скорость света и аналогию второго закона термодинамики, объединяет пространство-время