## ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЛЕКА-ШОУЛЗА ДЛЯ ОЦЕНКИ ЕВРОПЕЙСКОГО ОПЦИОНА И ЕГО ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Егорова В.Н.

Найдем интегральное представление для цены Европейского basket-опциона пут, используя преобразование Меллина. Обозначим К – цена исполнения опциона в момент времени t=T. Волатильность рыночной цены актива $\sigma_1^{\ 2}, \sigma_2^{\ 2}$ и коэффициент корреляции $\rho$ не зависят от времени. Цену активов в данный момент времени обозначим $S_1, S_2$ соответственно. Искомую величину стоимости опциона обозначим $p(S_1, S_2, t)$. Тогда в случае без выплаты дивидендов уравнение Блека-Шоулза имеет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^{\ 2} S_1^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S_1^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 p}{\partial S_1 \partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_2^{\ 2} S_2^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S_2^2} + \\ + rS_1 \frac{\partial p}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial p}{\partial S_2} - rp = 0. \tag{1}$$

Граничные условия:

$$p(S_1, S_2, T) = \theta(S_1, S_2) = \max\left(K - (S_1 + S_2), 0\right), \\ p(0,0,t) = Ke^{-r(T-t)}, \\ p(S_1, S_2, t) \to 0 \ при \ S_1 + S_2 \to \infty. \tag{2}$$

Используем преобразование Меллина:

$$p(S_1, S_2, t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \int_{c_2 - i\infty}^{c_2 + i\infty} \hat{p}(w_1, w_2, t) S_1^{\ -w_1} S_2^{\ -w_2} dw_1 dw_2,$$

где $\hat{p}(w_1, w_2, t)$ - функция двойного преобразования Меллина [2].

С учетом граничных и начальных условий такая замена переменных приведет к интегральному представлению точного решения уравнения (1):

$$p(S_1, S_2, t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \int_{c_2 - i\infty}^{c_2 + i\infty} \hat{\theta} e^{Q(T-t)} S_1^{\ -w_1} S_2^{\ -w_2} dw_1 dw_2, \\ \hat{\theta} = \hat{\theta}(w_1, w_2) = K^{w_1 + w_2 + 1} \frac{\Gamma(w_1)\Gamma(w_2)}{\Gamma(w_1 + w_2 + 2)}, \\ Q = \frac{1}{2}\sigma_1^{\ 2} w_1^{\ 2} + \rho\sigma_1\sigma_2 w_1 w_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^{\ 2} w_2^{\ 2} + \left(r - \frac{\sigma_1^{\ 2}}{2}\right) w_1 + \left(r - \frac{\sigma_2^{\ 2}}{2}\right) w_2 - r. \tag{3}$$

Авторами статьи [1] предлагается дальнейшее преобразование выражения (3). Полученные результаты сравнивались с методом Монте-Карло.

Приведем численное решение данного интегрального уравнения в виде (3).

Обозначим подынтегральную функцию $\Phi(w_1, w_2)$ и $\varphi_{jk} = \Phi(w_{1_j}, w_{2_k})$. Тогда квадратурную формулу трапеций для вычисления интеграла можно записать в виде:

$$I = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{dw_1 dw_2}{4} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} \left( \varphi_{jk} + \varphi_{jk+1} + \varphi_{j+1k} + \varphi_{j+1k+1} \right) \quad (4)$$

В силу того, что $\Phi(w_1, w_2) = \overline{\Phi(\overline{w_1}, \overline{w_2})}$, то есть:

$$\operatorname{Re} \Phi(w_1, w_2) = \operatorname{Re} \Phi(\overline{w_1}, \overline{w_2}), \operatorname{Im} \Phi(w_1, w_2) = -\operatorname{Im} \Phi(\overline{w_1}, \overline{w_2}),$$

Тогда всю вычислительную область можно разбить на 2 комплексно-сопряженные части:

$$\Omega^+ = \left\{ (w_1, w_2) : -A \le w_1 \le A, 0 \le w_2 \le A \right\},$$
$$\Omega^- = \left\{ (w_1, w_2) : -A \le w_1 \le A, -A \le w_2 \le 0 \right\}.$$

Тогда если обозначить

$$I^+ = \iint_{\Omega^+} \Phi(w_1, w_2) dw_1 dw_2, \; I^- = \iint_{\Omega^-} \Phi(w_1, w_2) dw_1 dw_2,$$

то искомый интеграл в силу комплексной сопряженности можно представить в виде:

$$I = I^+ + I^- = \operatorname{Re} I^+ + \operatorname{Im} I^+ + \operatorname{Re} I^- + \operatorname{Im} I^- = 2 \operatorname{Re} I^+.$$

Таким образом, можно рассматривать задачу не на всей вычислительной области, а лишь на части, что существенно сокращает время вычисления.

В результате были полученные следующие данные:

| Метод | Количество узлов | Цена опциона | CPU-time (время), с |
|---|---|---|---|
| Панини | 32 | 5.5163 | 0.11 |
| | 64 | 5.6007 | 0.44 |
| | 128 | 5.6006 | 1.71 |
| Без преобразования | 32 | 5.5918 | 0.08 |
| | 64 | 5.5920 | 0.26 |
| | 128 | 5.5926 | 1.07 |
| Монте-Карло | $10^6$ | 5.5928 | 47.08 |

Таким образом, можно добиться, чтобы без преобразования метод работал быстрее и точнее, чем с предложенными в [1] модификациями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R.Panini, R.P. Srivastav. Option pricing with Mellin Transforms. Mathematical and Computer Modelling, 40 (2004), p. 43-56.

2. Yu. A. Brychkov, H.J. Glaeske, A.P. Prudnikov and V.K. Tuan. Multidimensional integral transforms. Gordon and Breach, Amsterdam, 1992.

## НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОНЧ И СНЧ РАДИОСИГНАЛОВ ОТ РАЗРЯДОВ МОЛНИЙ

Тарабукина Л.Д.

*Физико-технический институт Якутского государственного университета им. М.К. Аммосова*

*Якутск, Россия*

В естественном низкочастотном радиошуме в некоторых случаях после атмосферных помех очень низкой частоты (ОНЧ) от молниевых разрядов типа «облако-земля» (атмосферик) наблюдается появление радиоимпульсов сверх низкой частоты (СНЧ).