Физико-математические науки

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОФИЛЯ СТРАТИФИКАЦИИ ЖИДКОСТИ

Козьменко Ю.Г., Потетюнко Э.Н.
Южный федеральный университет
Ростов-на-Дону, Россия

На основе известных дисперсионных кривых для свободных колебаний неоднородной жидкости определена ее неоднородность. В метриках пространств C, L_1, L_2 найдена погрешность отыскиваемой неоднородности в зависимости от точности входной информации (точности измеряемых длин внутренних волн в неоднородной жидкости и точности задания их частот).

В океанологическом приближении рассматривается задача о свободных колебаниях неоднородной жидкости [1]:

$$\begin{cases} \rho \dfrac{d\overline{V}}{dt} + \overline{F} = -gradp - \rho g k \\ div\overline{V} = 0 \\ \dfrac{d\rho}{dt} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

где $\overline{V}$ - вектор скорости в декартовой системе координат $Oxyz$, связанной с поверхностью Земли, p - гидродинамическое давление, ρ - плотность жидкости, g - ускорение свободного падения, $\overline{F} = 2\rho\left(\overline{\Omega}\times\overline{V}\right)$ — сила Кориолиса, $\overline{\Omega}$ — вектор угловой скорости вращения Земли, k - единичный орт, направленный по оси z (противоположно силе тяжести).

Граничные условия запишутся следующим образом:

условия непротекания на дне имеют вид

$$\left.\left(V_z - V_x \frac{\partial H}{\partial x} - V_y \frac{\partial H}{\partial y}\right)\right|_{z=-H(x,y)} = 0,$$

кинематическое граничное условие:

$$\left.V_n\right|_{z=\xi} = \frac{d\xi}{dt},$$

здесь ξ - возвышение свободной поверхности,
динамическое граничное условие записывается в следующем виде

$$\left.p(x,y,z,t)\right|_{z=\xi} = 0.$$

В линейном приближении решение задачи (1) ищется в виде бегущих волн. В результате этого рассматриваемая задача сводится к следующей задаче для амплитудной функции вертикальной скорости W:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2W}{dz^2} - \dfrac{\mu(z)}{g}\dfrac{dW}{dz} + \dfrac{\mu(z)-\omega^2}{\omega^2 - f^2}k^2W(z) = 0 \\ W(-H) = 0; \quad \dfrac{dW(0)}{dz} - \dfrac{gk^2}{\omega^2 - f^2}W(0) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

В приближении Буссинеска с граничным условием типа «твердой крышки» (фильтрация поверхностных волн) в безразмерных величинах, после замены переменных

$$z = -H\zeta\,,\ W(\zeta) = H\tilde{W}(\zeta),\ \mu(\zeta) = \tilde{\mu}(\zeta)\, f^2 / \tilde{f}^2\,,\ \omega^2 = \tilde{\omega}^2\, f^2/\tilde{f}^2\,,\ g = \tilde{g}H\, f^2/\tilde{f}^2\,,$$
$$k^2H^2 = \tilde{k}^2,\ \tilde{f}^2 = 10^{-2},$$

задача сведена к следующей (опущено обозначение безразмерности «~», ζ заменено на z):

$$\begin{cases} \dfrac{d^2W}{dz^2} + \dfrac{\mu(z)-\omega^2}{\omega^2 - f^2}k^2W(z) = 0 \\ W(1) = 0, \quad W(0) = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Будем считать, что неоднородность жидкости задана по линейному закону $\mu(z) = \mu_1 z + \mu_0$ и значения ω таковы, что существует точка поворота. То есть, пусть на отрезке $[0,1]$ в одной точке z_0 функция $\mu(z) - \omega^2$ меняет знак, так что

$$\mu(z) - \omega^2 \le 0\,,\ 0 \le z \le z_0\,,$$
$$\mu(z) - \omega^2 \ge 0\,,\ z_0 \le z \le 1\,.$$

Точка z_0 называется точкой поворота, т.е. точка, в которой обращается в ноль переменный коэффициент в дифференциальном уравнении второго порядка системы (3).

Решение краевой задачи строим в явном виде:

$$W = \sqrt{\frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)}}\left[D_1 J_{1/3}(u(z)) + D_2 J_{-1/3}(u(z))\right],\ z_0 \le z \le 1;$$
$$W = \sqrt{-\frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)}}\left[D_1 I_{1/3}(\upsilon(z)) + D_2 I_{-1/3}(\upsilon(z))\right],\ 0 \le z \le z_0;$$
$$u(z) = \lambda\int_{z_0}^{z}\left[\mu(\xi) - \omega^2\right]^{1/2} d\xi\,,\ \upsilon(z) = \lambda\int_{z}^{z_0}\left[-\mu(\xi) + \omega^2\right]^{1/2} d\xi\,,\ \lambda^2 = \frac{k^2}{\omega^2 - f^2}\,.$$

Удовлетворяя граничным условиям, получаем частотное уравнение

$$I_{1/3}(v(0))J_{-1/3}(u(1)) - I_{-1/3}(v(0))J_{1/3}(u(1)) = 0\,.$$

Считая $k >> 1$, заменим в этом уравнении функции Бесселя их асимптотическим представлением [2]

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \text{ при } |z| >> |\nu|,$$

и учтем, что при больших z справедливо $I_{1/3} = I_{-1/3}$.

Частотное уравнение примет вид

$$\cos\left(u(1) + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right) + \cos\left(u(1) - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right) = 0 .$$

Отсюда выводим

$$\sin\left(u(1) - \frac{3\pi}{4} \right) = 0 .$$

Так как $u(z) = \lambda \int\limits_{z_0}^{z} \left[\mu(\xi) - \omega^2 \right]^{1/2} d\xi$, где $\lambda^2 = \dfrac{k^2}{\omega^2 - f^2}$, получим

$$\left(\frac{k^2}{\omega^2 - f^2} \right)_n^{1/2} \int\limits_{z_0}^{1} \left(\mu(\xi) - \omega^2 \right)^{1/2} d\xi = \frac{3\pi}{4} + n\pi ,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Для линейного профиля скоростей интеграл вычисляется в явном виде, на основе которого при заданных значениях μ_0, μ_1, построены дисперсионные кривые.

Теперь ставится задача: считая, что известны значения ω и k с дисперсионных кривых, определить параметры неоднородности жидкости μ_0, μ_1.

Для их определения выписываем уравнение для двух пар (ω, k)

$$k^2 = \left(\frac{\frac{3\pi}{4} + n\pi}{\int\limits_{z_0}^{1} \left(\mu(\xi) - \omega^2 \right)^{1/2} d\xi} \right)^2 \left(\omega^2 - f^2 \right),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots ,$$

что приводит к нелинейной системе для определения параметров μ_0, μ_1.

Нелинейность системы обуславливает неоднозначность определения параметров μ_0, μ_1. Для однозначности определения этих параметров выписывается «избыточное» число уравнений для «избыточных» пар чисел ω и k, и параметры μ_0, μ_1 определяются как минимум функционала

$$\min_{\mu_0,\mu_1} \Phi = \min_{\mu_0,\mu_1} \sum_{n=1}^{N} \left(k_n^2 - \left(\frac{\frac{3\pi}{4} + n\pi}{\int\limits_{z_0}^{1} \left(\mu(\xi) - \omega_n{}^2 \right)^{1/2} d\xi} \right)^2 \left(\omega_n{}^2 - f^2 \right) \right)^2 .$$

Изучается точность восстановленной функции неоднородности жидкости:
в пространстве C

$$\delta_1 = \frac{\max\limits_{0\le z\le H}\left|\mu(z)-\tilde{\mu}(z)\right|}{\max\limits_{0\le z\le H}\left|\mu(z)\right|}100\% = 6.5\%;$$

в пространстве L_1

$$\delta_2 = \frac{\int\limits_0^H\left|\mu(z)-\tilde{\mu}(z)\right|dz}{\int\limits_0^H\left|\mu(z)\right|dz}100\% = 18.54\%$$

в пространстве L_2

$$\delta_2 = \frac{\sqrt{\int\limits_0^H\left(\mu(z)-\tilde{\mu}(z)\right)^2dz}}{\sqrt{\int\limits_0^H\left(\mu(z)\right)^2dz}}100\% = 16\%$$

Здесь $\mu(z)$ - восстановленная функция стратификации по найденным значениям параметров μ_0, μ_1, а функция $\tilde{\mu}(z)$ - заданная стратификация жидкости.

При этом исследуется вопрос влияния на единственность и точность восстановления неоднородности жидкости тот факт, берутся ли пары чисел (ω_n, k_n) с одной дисперсионной кривой, или с разных. Также исследуется влияние близости между собой точек, взятых с дисперсионных кривых, на точность восстановления профиля стратификации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981. – 301 с.

2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

Экономические науки

АКТУАЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА: МИНИМАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ВАЛОВОГО ВНУТРЕННЕГО ПРОДУКТА РОССИИ В УСЛОВИЯХ МИРОВОГО ФИНАНСОВОГО КРИЗИСА 2009 ГОДА

Тарушкин В.Т., Тарушкин П.В., Тарушкина Л.Т.
Санкт-Петербургский государственный университет
Санкт-Петербург, Россия

Экономическая проблема: “Достигло или нет своего “дна” падение ВВП (валового внутреннего продукта) России” решается методами математического анализа на основе теории эксперимента с минимумом наблюдений.

Пусть 0 обозначает конец 2 – го квартала 2009 года, 3 и 6 будут обозначать соответственно конец 3 – го и 4 –го кварталов. Проблема состоит в том, чтобы по данным y(0)=0, y(3)= - 9.9, y(6) = - 8.7 (все измерения в процентах по отношению к значениям предыдущего года) найти по методу наименьших квадратов параметры a и b аналитической зависимости y(x) = a x ln x + b x (заметим [1], что при x → 0 будет lim x ln x = 0, откуда по непрерывности доопределяем y(0) = 0, т. е. добиваемся удовлетворения первым значениям наблюдений за счёт выбора системы координат и закона аналитической зависимости). С использованием пакета Derive по методу наименьших квадратов находим y(x) = 2.7x ln x – 6.23x. Этот же ответ можно получить, решая относительно a и b систему условных уравнений (3 ln 3) a + 3 b = - 9.9, (6 ln 6) a + 6 b = - 8.7 (здесь системы условных и нормальных уравнений метода наименьших квадратов в силу минимума наблюдений имеют одинаковые решения). Классический подход показывает [1], что кривая y(x) является выпуклой к низу с единственной