

ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ УСКОРЕНИЯ ЭЛЕКТРОНА ПОЛЕМ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Меньшов Е.Н.

Ульяновский государственный
 технический университет,
 Ульяновск, Россия

В традиционной электродинамике хорошо известно строгое, но неявное решение данной задачи [1]. При этом электрон в поле плоской волны осциллирует и дрейфует [2], а также ускоряется в направлении распространения волны. Последнее движение обусловлено явлением передачи заряду той части импульса поля волны, которая связана с энергией поля излучения электрона. Сила этого процесса равна усредненной силе реакции излучения $\langle fS \rangle$, а её физической причиной выступает магнитная сила Лоренца [1].

В рамках модернизированной классической электродинамики появляется сдвиг фаз между E и $H=B/\mu_0$, вытекающий из базисных уравнений такого поля [3]. Поле плоской, однородной линейно поляризованной волны для частот $\omega\tau \ll 1$ будет

$$E_x \approx E_m \sin \omega(t - \frac{z}{c}), \quad B_y \approx \frac{E_m}{c} \sin \omega(t + t - \frac{z}{c}), \quad (1)$$

где τ – постоянная времени: параметр новых уравнений Максвелла.

Сдвиг фаз между E и H приводит к непосредственному влиянию магнитной силы Лоренца на поступательное движение заряженной частицы. Здесь изучается характер движения нерелятивистского электрона в поле (1) в лабораторной системе отсчета. Силой fS пренебрегаем, уравнение движения заряда q с массой m будет:

$$m \frac{dv_x}{dt} = qE - qBv_z, \quad m \frac{dv_z}{dt} = qBv_x. \quad (2)$$

Переходим к обыкновенному уравнению относительно скорости v_z

$$v_z'' - \frac{B'}{B} v_z' + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v = q^2 \frac{EB}{m}. \quad (3)$$

Уравнение (3) имеет аналитическое решение [4]. Пренебрегая изменением фазы волны $\psi = \omega[t - z/c] = \omega[t(1 - v/c) - z(t_0)/c] \equiv \omega[t - z(t_0)/c]$ и заменяя переменные $B'/B = s'/s$; $s = \sin \alpha(t + \tau - z/c) = \sin[\omega(t + \tau - z/c) + \pi]$; $e = \int s dt = -\omega - 1 \cos \omega(t + \tau - z/c) = \omega - 1 \cos[\omega(t + \tau - z/c) + \pi]$; $\alpha = qEm/mc$; $\beta = \alpha/2c$; $v_z(t) = \eta(\epsilon)$; $E/Em = \sin[\omega(t + \tau - z/c) - \omega\tau] = s \left[\cos \omega t - we (\sqrt{1 - (we)^2})^{-1} \sin \omega t \right]$, преобразуем (3) к виду

$$\frac{d^2 h}{de^2} + a^2 h = b \left[\cos \omega t - \frac{we \sin \omega t}{\sqrt{1 - (we)^2}} \right]. \quad (4)$$

Заметим, что в точках $\omega t_k = (\pi k - \omega\tau + \omega z/c)$, в которых $s(t_k) = 0$, будет существовать решение уравнения (3), если удовлетворяется условие

$$v_z''(t_k) = \frac{s'(t_k)}{s(t_k)} v_z'(t_k).$$

Общее решение (4) известно

$$h = v_z = D_1 \sin ae + D_2 \cos ae + \frac{b}{a^2} \cos wt - \frac{bw}{a} \sin wt \int_e \frac{l \sin a(e-l)}{\sqrt{1-(wl)^2}} dl. \quad (5)$$

Рассмотрим пример с нулевой начальной скоростью частицы при $t=t_0$; $v_z(t_0)=v_x(t_0)=0$, тогда из (2) $az(t_0)=0$. Подставляя их в (5), имеем:

$$v_z = c \cos wt \left[1 - \cos a(e - e_0) \right] + \frac{bw}{a} \sin wt \left[\cos a(e - e_0) + \sin a(e - e_0) \right] \times \\ \times \int_{e_0} \frac{l \sin a(e_0 - l)}{\sqrt{1-(wl)^2}} - \frac{bw}{a} \sin wt \int_e \frac{l \sin a(e - l)}{\sqrt{1-(wl)^2}} dl, \quad (6)$$

$$a_z = \sin w \left(t + t - \frac{z}{c} \right) \left[ca \cos wt \cdot \sin a(e - e_0) - \right. \\ \left. - bw \sin wt \left\{ \left[\sin a(e - e_0) - \cos a(e - e_0) \right] \int_{e_0} \frac{l \sin a(e_0 - l)}{\sqrt{1-(wl)^2}} + \int_e \frac{l \cos a(e - l)}{\sqrt{1-(wl)^2}} dl \right\} \right] \quad (7)$$

Подставляя (7) во второе (2), получаем

$$v_x = c \cos wt \cdot \sin a(e - e_0) - \\ - \frac{bw}{a} \sin wt \left\{ \left[\sin a(e - e_0) - \cos a(e - e_0) \right] \int_{e_0} \frac{l \sin a(e_0 - l)}{\sqrt{1-(wl)^2}} + \int_e \frac{l \cos a(e - l)}{\sqrt{1-(wl)^2}} dl \right\}, \quad (8)$$

$$a_x = \sin w \left(t + t - \frac{z}{c} \right) \left\{ ca \cos wt \cdot \cos a(e - e_0) - \frac{b}{a} \sin wt \left[ctgw \left(t + t - \frac{z}{c} \right) + aw \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (\cos a(e - e_0) + \sin a(e - e_0)) \int_{e_0} \frac{l \sin a(e_0 - l)}{\sqrt{1-(wl)^2}} - aw \int_e \frac{l \sin a(e - l)}{\sqrt{1-(wl)^2}} dl \right] \right\}, \quad (9)$$

где $e_0 = -w^{-1} \cos w(t_0 + t - \frac{z}{c})$. Выражения (6)-(9) правомерны при $(v/c) \ll 1$, это требует $\alpha/\omega \ll 1$, поэтому, заменяя $\lambda = -(\cos \varphi)/\omega$, имеем:

$$-w^2 \int_e \frac{l \sin a(e - l)}{\sqrt{1-(wl)^2}} dl = \int_{w(t+t-\frac{z}{c})} \cos j \sin a \left(e + \frac{\cos j}{w} \right) dj \approx -\frac{a}{w} \cos w \left(t + t - \frac{z}{c} \right) \times$$

$$\times \int_{w(t+t-\frac{z}{c})} \cos j \, dj + \frac{a}{w} \int_{w(t+t-\frac{z}{c})} \cos^2 j \, dj \approx -\frac{a}{4w} \sin 2w(t+t-\frac{z}{c}) + \frac{a}{2} (t+t-\frac{z}{c});$$

$$-w \int \frac{l \cos a (e-l)}{e \sqrt{1-(wl)^2}} dl \approx \frac{1}{w} \sin w(t+t-\frac{z}{c}) + \frac{a^2}{4w^3} \left[\sin 2w(t+t-\frac{z}{c}) + 2w(t+t-\frac{z}{c}) \right].$$

Учитывая условие распространения волн $\omega t \ll 1$, приближенные выражения будут

$$v_z \approx \frac{1}{c} \left(\frac{qE_m}{mw} \right)^2 \left\{ \left[\cos w(t+t-\frac{z}{c}) - \cos w(t_0+t-\frac{z}{c}) \right]^2 + \frac{(wt)^2}{2} w(t-t_0) \right\}, \quad (10)$$

$$v_x \approx \left(\frac{qE_m}{m} \right)^3 \frac{tw(t+t-\frac{z}{c})}{2(cw)^2} \cos w(t+t-\frac{z}{c}) - \left(\frac{qE_m}{mw} \right) \left[\cos w(t+t-\frac{z}{c}) - \cos w(t_0+t-\frac{z}{c}) \right]$$

Вывод. В новой электродинамике (для традиционной $\tau=0$), согласно (10), электрон в поле ЭМ волны колеблется в поперечном направлении с частотой ω , в продольном направлении – с частотой 2ω , а также дрейфует с постоянной скоростью, значение которой зависит и от начальных условий, и от начальной фазы волны $\omega(t_0-z/c)$. В продольном направлении электрон также равномерно ускорится силой

$$\langle f_z \rangle = \left\langle \frac{dmv_z}{dt} \right\rangle = \frac{t}{2c} \frac{(qE_m)^2}{m}.$$

Проведем её сравнение с радиационной силой $\langle f_S \rangle$, и с продольной градиентной поперомоторной силой $\langle f_{PZ} \rangle$, которая правомерна для неоднородной волны. Первая определяется в [1], вторая – в [5], тогда для радиоимпульса длительностью t_0 имеем:

$$\langle f_S \rangle = s \frac{\langle \ddot{I}_1 \rangle}{c} = \frac{\langle P_2 \rangle}{c} = \frac{(qE_m)^2 t_0}{2mc}, \quad \langle f_{PZ} \rangle = -\left\langle \left(\frac{q}{w} \right)^2 \frac{E_m}{2m} \frac{dE_m}{cdt} \right\rangle \approx \frac{(qE_m)^2 t_0}{2mcw^2 t_0}$$

$$\langle f_z \rangle / \langle f_S \rangle = t / t_0, \quad \langle f_z \rangle / \langle f_{PZ} \rangle = w^2 t t_0.$$

Здесь: P_1 – величина вектора Пойтинга волны, σ – полное сечение рассеяния и P_2 – мощность излучения электрона, $t_0 = (r_0/c) < \tau$, r_0 – классический радиус электрона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля, том. 2. – М.: Наука, 1973. – 504 с.
2. Болотовский Б.М., Серов А.В. Особенности движения частиц в электромагнитной волне // Успехи физических наук. – 2003. – Т. 173. – №6. – С. 667-678.
3. Меньшов Е.Н. Математическое моделирование электромагнитного поля: Деп. в ВИНТИ от 25.10.2002, №1842 – В 2002. – 9 с.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Пер. с нем. С.Ф. Фомина. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
5. Федоров М.В. Электрон в сильном световом поле. – М.: Наука, 1991. – 223 с.