К ПРОБЛЕМЕ ПОСТРОЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ 2D СИСТЕМ

Крупенин В.Л.

Институт машиноведения РАН,
Москва, Россия

1. В работе выводятся операторные и интегральные уравнения движения 2D систем**.** Рассмотрим два семейство взаимно перпендикулярных упругих одинаковых линейных струн, защемленных на концах и имеющих соответственно длины L_1 и L_2. Каждая струна нумеруется при помощи индексов k = 0,1,2,., N_1 и q = 0,1,2.. N_2. Пусть струны образуют решетчатую 2D систему. В точках сопряжения помещены абсолютно твердые тела массами m. Главная особенность системы – ее состояние дается матрицей прогибов объекта в узлах.

Предположения: прямоугольные ячейки одинаковы; решетка – анизотропна; струнные элементы - безынерционны. Пусть силы диссипации, вынуждающие силы, а также любые другие неконсервативные силы – малы. Обозначив их • $g_{kq}(t, u_{kq}, \dot{u}_{kq},\ldots)$, • - малый параметр. Так как каждая частица лежит одновременно на двух струнах, то для всех значений индексов имеем N уравнений [N= $(N_1-1)(N_2-1)$]:

$$m\ddot{u}_{kq}+c_1(2u_{kq}-u_{(k-1,q)}-u_{(k+1,q)})+c_2(2u_{kq}-u_{(k,q-1)}-u_{(k,q+1)})=\bullet\ g_{kq}(t, u_{kq}, \dot{u}_{kq},\ldots), \qquad (1)$$

где: $c_{1,2}$ - коэффициенты упругости. Граничные условия: $u_{kq}=0$, при $k=0;N_1$; $q=0;N_2$.

2. Приведем операторные уравнения движения, следующие из уравнений (1). В соответствии с общими методиками [1, 2,] построим оператор динамической податливости:

$$\hat{L}(p)=\|L_{kq,nj}(p)\|;\ p\equiv d/dt,$$

В данном случае выражение $L_{kq,nj}(p)$ обозначает проходной оператор [1], ставящей в соответствие силе, приложенной в узле (n,j) перемещение узла (k,q). При n=k, j=q – имеем локальные операторы динамической податливости [2], отвечающие перемещению узла, вследствие силы, приложенной в нем самом. Для рассматриваемой системы принцип взаимности записывается как $L_{kq,nj}(p) == L_{nj,kq}(p)$.

Система уравнений движения (1) при этом разрешается в виде:

$$\|u_{kq}\|=\bullet\ \hat{L}(p)\|g_{nj}\|,$$

где • $\|g_{kq}\|$ - матрица внешних сил, приложенных в узлах решетки, что покомпонентно записывается так:

$$u_{kq}(t)=e\sum_n\sum_j L_{kq,nj}(p)g_{nj}(t). \qquad (2)$$

Выражения для операторов динамических податливостей полностью определяются наборами собственных частот {• $_{kq}$} и нормированных коэффициентов собственных форм.

{• $_{kq}$} линейной системы [2].Используя результаты, данные в монографии [1] для решетки рассматриваемого типа:

$$\bullet\ ^2_{kq}\bullet\cdot\frac{2T_1}{m\Delta L_1}\bullet\tilde{\imath}\cos(k\bullet\ N_1^{-1}\cdot\cdot\frac{2T_2}{m\Delta L_2}\bullet\tilde{\imath}\cos(q\bullet\ N_2^{-1}\cdot\cdot, \qquad (3)$$

$$\bullet\ _{kq}=C\sin(kn\bullet\ N_1^{-1})\sin(qj\bullet\ N_2^{-1}), \qquad (4)$$

C=const. При этом в силу выбранных граничных условий n = 1,2,… N_1-1 и также j = 1,2,… N_2-1. В соответствии с методами построения операторов динамической податливости [2] можно получить для компонентов оператора $\hat{L}$ (p), определяющих (2):

$$L_{kq,nj}(p)=\bullet \sum_{a=1}^{N_1-1}\sum_{b=1}^{N_2-1} \sin(k\bullet \bullet N_1^{-1})\sin(q\bullet \bullet N_2^{-1})\sin(\bullet n\bullet N_1^{-1})\sin(\bullet j\bullet N_2^{-1})(\bullet {}^{2}_{ab}+p^2)^{-1}. \qquad (5)$$

Здесь введен нормировочный коэффициент •. , который, в общих случаях удобнее всего вычислять при конкретно заданных параметрах системы. В данном случае можно положить:• =2[(N_1-1)(N_2-1)]$^{-2}$.

3. Операторное представление (2) – универсально. Внося конкретизирующие предположения, можно получить простые представления для реализации формулы (2).

Если правые части (1) периодичны по времени с периодом T: при всех *k* и *q*,то. отыскивая T - периодическое решение, можно воспользоваться методами интегральных представлений периодических решений [2]:

$$u_{kq}(t)= e\sum_{n}\sum_{j}\int_{0}^{T} \bullet_{kq,nj}(t-s)g_{nj}(s)ds, \qquad (5)$$

где функции $\bullet_{kq,nj}$(t-s) называются T - периодическими функциями Грина (ПФГ) [2-4] – проходными (k≠n; q≠j) или локальными (k=n; q=j) и определяются соответствующим оператором динамической податливости так (T=2• • $^{-1}$):

$$\bullet_{kq,nj}(t)=T^{-1}\sum_{s=-\infty}^{\infty} L_{kq,nj}(i\bullet \bullet)\exp(i\bullet \bullet t),$$

ПФГ $\bullet_{kq,nj}$ (t) – реакция узла (k,q) на силовое воздействие, приложенное в узле (n,j) и описываемое T – периодической последовательностью • -функций Дирака – • ^{T}(t): определению

$$\bullet^{T}(t)=\sum_{K=-\infty}^{\infty} . \bullet (t-Kt).$$

Эту обобщенную функцию можно разложить в сходящийся в обобщенном смысле ряд Фурье вида:

$$\bullet^{T}(t)= T^{-1}\sum_{s=-\infty}^{\infty} \exp(i\bullet \bullet t).$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (Проект 05-08-50183).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Нагаев Р.Ф., Ходжаев К.Ш. Колебания механических систем с периодической структурой. - Ташкент: ФАН, 1973. – 272 с.

2. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах. - М., Наука, 1985. – 384 с.