УДК 531.011: 538.3

ФУНКЦИЯ СОСТОЯНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ И ТЕОРИИ ПОЛЯ

Пономарев Ю.И.

Оренбургский государственный педагогический университет

Оренбург, Россия

Подробная информация об авторах размещена на сайте «Учёные России» - http://www.famous-scientists.ru

В работе показано, что фундаментальные принципы классической механики и теории поля – принцип наименьшего действия и калибровочная инвариантность полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$ электромагнитного поля – есть прямое следствие существования уже в рамках классической физики функции состояния.

Происхождение физических законов всегда привлекало к себе внимание. Почему законы природы имеют именно существующий вид, а не другой? Существуют ли некоторые всеобщие законы или принципы их построения? Аналитическая механика может быть сформулирована на основе принципа наименьшего действия, утверждающего, что существует некоторая функция, называемая действием

$$S = \int L \cdot dt, \tag{1}$$

которая для реальных траекторий принимает экстремальное значение. Природа этой загадочной функции, также как и происхождение этого принципа, до конца не ясна. Но, тем не менее, эти неопределенности не мешают получать известные нам законы классической динамики, необходимо только подобрать правильный вид функции Лагранжа. Поэтому принцип наименьшего действия носит больше обобщающий характер и вряд ли может служить полноценным инструментом для логически безупречного обоснования законов природы.

Такой же загадочный ореол и у другого важнейшего динамического принципа теории поля – принципа калибровочной инвариантности. Существует ли принципы ещё более общие, чем вышеназванные?

Язык общения с природой выбирает сам человек. В процессе экспериментального исследования он подбирает величины, которые, по его мнению, наиболее оптимально описывают состояния тел и процессы. Отношения между этими величинами мы называем законами природы. Эксперимент же определяет минимальное и в то же время достаточное количество параметров, необходимых для однозначного описания состояния тела. Будет ли такой набор параметров единственно возможным, нам неизвестно.

В нашей работе предложен подход, позволяющий сформулировать в наиболее общем виде законы классической механики и теории поля с привлечением минимального количества исходных положений и данных. Будем исходить из того, что существует некоторая функция *П*, определяющая состояние частицы. От каких величин она может зависеть? В качестве минимального количества параметров мы принимаем координаты и время, а для несвободной частицы – ещё и константу взаимодействия: $П(\vec{r}_н, t_н, \Delta t)$. Время будем отсчитывать от некоторого начального значения $t_н$, а координаты от некоторого начального значения $\vec{r}_н$:

Если отсчет времени и координат ведётся от $t_н = 0$ и $\vec{r}_н = 0$, то Δt совпадает с t и Δr совпадает с $\vec{r}$. Рассмотрим бо-

лее детально переменные $\vec{r}$ и t. В произвольно выбранный начальный момент времени $t_н$ эти переменные независимы, поскольку начать измерение можно в любой точке пространства и в любой момент времени. В дальнейшем, в результате некоторого реального процесса, связанного с частицей, ее координаты изменятся на $\Delta\vec{r}(\Delta t)$.

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_н + \Delta\vec{r} \\ t = t_н + \Delta t \end{cases} . \qquad (2)$$

Вследствие этих предположений независимыми параметрами, задающими состояние в произвольный момент времени, являются три величины: $\vec{r}_н, t_н$ и Δt.

Рассмотрим процесс движения свободной частицы. Поскольку $П$ – функция определяет состояние, то бесконечно малое изменение этого состояния определяется ее полным дифференциалом

$$dП = \left(\frac{\partial П}{\partial \vec{r}_н}\right)_{t_н,\Delta t} d\vec{r}_н + \left(\frac{\partial П}{\partial t_н}\right)_{\vec{r}_н,\Delta t} dt_н + \left(\frac{\delta П}{\delta(\Delta t)}\right)_{\vec{r}_н,t_н} d(\Delta t) . \qquad (3)$$

Введем обозначения:

$$\frac{\partial П}{\partial \vec{r}} \equiv \vec{p}, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial П}{\partial t} \equiv -W, \qquad (5)$$

функциональная производная:

$$\frac{\delta П}{\delta(\Delta t)} = \left(\frac{\partial П}{\Delta t} + \frac{\partial П}{\Delta \vec{r}}\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right)_{\vec{r}_н,t_н} = L . \qquad (6)$$

В этих обозначениях дифференциал функции состояния $П$ запишется в виде

$$dП = \vec{p}_н d\vec{r} - W_н dt_н + L d(\Delta t) . \qquad (7)$$

Условиями того, что $dП$ является полным дифференциалом, а $\vec{p}$ и W явно от времени не зависят, то

$$\frac{d\vec{p}_н}{d(\Delta t)} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_н} \qquad (8)$$

$$\frac{dW_н}{d(\Delta t)} = -\frac{\partial L}{\partial t_н} \qquad (9)$$

$$rot\vec{p}_н = 0 . \qquad (10)$$

Если предположить независимость функции L от выбора начала отсчета координат $\vec{r}_н$, то отсюда следует сохранение вдоль траектории величин $\vec{p}_н$, которая носит название импульса и W, которая носит название энергии. Величина L является ничем иным, как функцией Лагранжа для свободной частицы.

Перейдем к рассмотрению случая, когда частица не свободна и взаимодействует с другой частицей, находящейся от нее на расстоянии $r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$. Будем считать, что $П$-функция аддитивно содержит функцию взаимодействия $П_{Вз}(r_{12},t)$: $П = П_{Св} + П_{Вз}$. Предположим для просто-

ты, что вторая частица покоится. Введем обозначения:

$$\frac{\partial \Pi_{Вз}}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial \Pi_{Вз}}{\partial r_{12}} \cdot \frac{\partial r_{12}}{\partial \vec{r}} = \vec{p}_{Вз}, \quad \frac{\partial \Pi_{Вз}}{\partial t} = -U, \quad L_{Вз} = -U + \vec{p}_{Вз} \cdot \vec{\upsilon},$$

$$W = W_{Св} + U, \quad \vec{P} = \vec{p}_{Св} + \vec{p}_{Вз}, \quad L = L_{Св} + L_{Вз}. \tag{11}$$

В этом случае формулы (8), (9), (10) сохраняют свой вид, но под $W, \vec{P}, L$ величинами следует понимать обозначения (11). Пользуясь формулами векторного анализа аналогично [1], получаем:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial \vec{p}_{Вз}}{\partial t} + [\vec{\upsilon}, rot\vec{p}_{Вз}]. \tag{12}$$

Уравнение (9) в случае независимости L от выбора начального момента времени и неподвижности второй частицы приводит к закону сохранения энергии в виде:

$$W_{Св} + U = const.$$

В частном случае, если принять $\Pi_{Вз} = q\alpha$, где заряд q является константой взаимодействия, вводим обозначения:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial \alpha}{\partial r_{12}} \cdot \frac{\partial r_{12}}{\partial \vec{r}} = \vec{A}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\varphi, \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}, \quad rot\vec{A} = \vec{B}. \tag{13}$$

После несложных преобразований можем получить уравнение, выражающее силу, действующую на заряд со стороны электромагнитного поля:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = q\vec{E} + q[\vec{\upsilon}, \vec{B}]. \tag{14}$$

С учетом обозначений в случае взаимодействия уравнение (10) можно записать в виде $rot(\vec{p}_{Св} + \vec{p}_{Вз}) = \vec{0}$, для электромагнитного поля $\vec{p}_{Вз} = q\vec{A}$, тогда

$$rot\vec{p}_{Св} = -rot\vec{p}_{Вз} = -q \cdot rot\vec{A} = -q\vec{B}. \tag{15}$$

Поскольку $\vec{B} \neq \vec{0}$, у частицы возникает вращательное движение с мгновенной угловой скоростью $\vec{\omega}$, и ее импульс в этом случае запишется как $\vec{p}_{Св} = m[\vec{\omega}, \vec{r}]$, значит $rot\vec{p}_{Св} = 2m\vec{\omega}$. Дальнейшие преобразования приводят нас к теореме Лармора:

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{2m}\vec{B}. \tag{16}$$

Мы видим, что основное уравнение механики, законы сохранения и теорема Лармора вместе наиболее полно отражают законы динамики. Мы видим, что связь энергии, импульса, координаты и времени во втором законе механики реализуется через функцию состояния.

Наш подход позволяет вывести и дать несколько другую трактовку фундаментальным динамическим принципам: наименьшего действия и калибровочной инвариантности. В частности, полагая $t_н = 0$ и $r_н = 0$ и интегрируя по промежутку времени от t_1 до t_2 получаем из (7) выражение

$$\Pi_2 - \Pi_1 = \int_{t_1}^{t_2} L dt = S$$

при фиксированных значениях t_1 и t_2 значение действия S не зависит от выбора траектории перехода $1 \to 2$.

Становится понятной уже в рамках классической физики происхождение принципа калибровочной инвариантности, по которому динамические величины $\vec{E}$ и $\vec{B}$ являются инвариантными относительно градиентных преобразований:

$$\vec{A} \mapsto \vec{A}' = \vec{A} + grad\chi \,, \quad \varphi \mapsto \varphi' = \varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \,. \tag{17}$$

Легко убедиться в том, что эти преобразования есть следствие преобразования *П*-функции $\vec{\Pi}_{Вз} \mapsto \vec{\Pi}'_{Вз} = \vec{\Pi}_{Вз} + q\chi$.

Развитый в работе принцип построения законов динамики не требует предварительного знания этих законов. Он показывает, что появление в теории таких динамических величин, как энергия, импульс с необходимостью следует из выбора пространственно-временного способа описания событий. Введение заряда, как константы взаимодействия и как можно показать учёт симметрии взаимодействия автоматически приводит к уравнениям электродинамики.

Принцип наименьшего действия, как и принцип преобразования калибровки, является следствием и указанием на уже в рамках классической физики существование функции состояния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1998.

THE STATE FUNCTIONS IN CLASSICAL MECHANICS AND FIELD THEORY

Ponomarev Yu.I.
Orenburg State Pedagogical University
Orenburg, Russia

It is shown that the fundamental principles of classical mechanics and field theory such as the least action principle and the calibration invariance principle of the $\vec{E}$ and $\vec{B}$ vectors of electromagnetic field are consequences of the existence of the state function even in classical physics.