

СПИН КАК ЭФФЕКТ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Свирский М.С., Свирская Л.М.

Челябинский государственный педагогический университет

Принято считать, что спин является релятивистским квантовым эффектом. Покажем, что спин является эффектом нерелятивистской квантовой механики. С учетом равенств

$$p_x = -i\hbar \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial x}, p_y = -i\hbar \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial y}, p_z = -i\hbar \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial z} \quad (1)$$

получаем из нерелятивистской связи между энергией и импульсом $E = p^2 / 2m + U$ нелинейное волновое уравнение нерелятивистской квантовой механики

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 \right] + U y^2 = E y^2 \quad (2)$$

В случае свободного движения ($U = 0$) из (2) вытекает уравнение

$$-i\hbar \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2} = \sqrt{2mE} y \quad (3)$$

Чтобы извлечь квадратный корень в левой части (3), представим его в виде

$$\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2} = s_x \frac{\partial y}{\partial x} + s_y \frac{\partial y}{\partial y} + s_z \frac{\partial y}{\partial z}, \quad (4)$$

где спиновые матрицы Паули

$$s_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

С учетом (4) из уравнения (3) следует, что $\hat{L} y = \sqrt{2mE} y$, где $\hat{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{S} & \hat{p} \end{pmatrix}$. При этом

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{K} + \mathbf{S} & \end{pmatrix} \hat{L} - \hat{L} \begin{pmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{K} + \mathbf{S} & \end{pmatrix} = 0, \quad (6)$$

где $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{F} \\ r & p \end{bmatrix}$ - оператор орбитального момента импульса, а $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \hbar \mathbf{s}$ - оператор спинового момента импульса, совпадающий с выражением из теории спина Паули.

В заключение отметим, что нелинейное волновое уравнение (2) эквивалентно установленному нами обобщенному уравнению Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + \frac{i\hbar}{2m} \psi \operatorname{div} \mathbf{p} + U\psi = E\psi \quad (7)$$